

NUTS による長期記憶を持つ非対称 SV モデルの ベイズ推定 (第 2 回)

日本大学経済学部 戸塚英臣

日本大学経済学部 三井秀俊

1. はじめに

前号では, (Hamiltonian Monte Carlo; 以下, MHC) 法と Leapfrog 法に関して説明し, NUTS (No-U-Turn Sampler; 以下, NUTS) に関して解説を行なった. 第 2 回では, 本稿の分析モデルである長期記憶を持つ非対称 SV (Stochastic Volatility with Leverage; 以下, SVL) モデル¹⁾ について説明し, 日経平均株価の日次データを用いて, NUTS を利用した HMC 法によるベイズ推定の実証分析と推定結果について述べる.

2. 長期記憶を持つ SVL モデル

長期記憶を持つ SVL モデルは, t 時点での日次収益率 y_t とボラティリティの対数を h_t として,

$$y_t = \exp(h_t/2)u_t, \quad t = 1, \dots, n, \quad (1)$$

$$(1-L)^d \Phi(L)(h_t - \mu) = \Theta(L)\eta_t, \quad t = 1, \dots, n-1, \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim i.i.d. \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho\sigma \\ \rho\sigma & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix} \right). \quad (3)$$

で与えられる. ここで, u_t は平均 0, 分散 1, η_t は平均 0, 分散 σ_η^2 の正規分布に従う誤差項であり, u_t と η_t とが, 相関関係 ρ を持つ. *i.i.d.* は, 過去と独立で同一な分布 (independent and identically distributed) を表す. h_t はボラティリティの変動を示す潜在変数であり, (2) 式で表される時系列モデルは, 自己回帰実数分移動平均 (Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average; 以下, ARFIMA) モデルと呼ばれる. L はラグオペレーターであり, $Lh_t = h_{t-1}$ を満足する. また, $\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p$, $\Theta(L) = 1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q$ と定義される. $\{\phi_n\}(n = 1, \dots, p)$ と $\{\theta_n\}(n = 1, \dots, q)$ は, AR(p) モデルと MA(q) モデルのパラメータに対応する. ある時系列データの k 次の自己共分散関数を $\gamma(k)$ で表す. この自己共分散関数を数列と見なしたとき, $\sum_{h=0}^{\infty} |\gamma(h)| = \infty$ を満たすとき, その時系列は長期記憶過程に従うといい, $\sum_{h=0}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty$ を満たすとき, その時系列は短期記憶過程に従うという. ARFIMA モデルの自己共分散関数 $\gamma(h)$ は,

$$\gamma(h) \sim |h|^{2d-1} (h \rightarrow \infty)$$

¹⁾詳しくは, Takahashi *et al.* (2023) を参照のこと.

が成り立つ。したがって、 $d > 0$ ならば、ARFIMA モデルは、長期記憶過程に従う。本稿では、(1) – (3) 式からなるモデルを SVL-ARFIMA (p, d, q) モデルと呼ぶことにする。本稿では、ARFIMA モデルの次数を $(1, d, 1)$ までとする。したがって、 $\Phi(L) = 1 - \phi L$ 、 $\Theta(L) = 1 - \theta L$ となる。なお、 $|\phi| < 1$ と $-1/2 < d < 1/2$ のとき、ARFIMA $(1, d, 1)$ 過程は定常となる。

ARFIMA $(1, d, 1)$ モデルの推定には、Beran (1995) による AR 近似による推定法を用いる。(2) 式より、ARFIMA $(1, d, 1)$ モデルは、

$$(1 - \theta L)^{-1} (1 - \phi L) (1 - L)^d (h_t - \mu) = \eta_t \quad (4)$$

となる。ただし、右辺の $(1 - \theta L)$ を左辺に移項し、 ϕ と θ の添え字は省略した。(4) 式の左辺は、 $(1 - \theta L)^{-1}$ を Taylor 展開し、また、 $(1 - L)^d$ を二項展開²⁾ し、まとめると

$$\begin{aligned} & (1 - \theta L)^{-1} (1 - \phi L) (1 - L)^d (h_t - \mu) \\ &= (h_t - \mu) + \sum_{k=1}^{t-1} \left[\sum_{j=0}^k \gamma_j \theta^{k-j} - \phi \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j \theta^{k-1-j} \right] (h_{t-k} - \mu) \\ &= (h_t - \mu) + \sum_{k=1}^{t-1} \tilde{\gamma}_k (h_{t-k} - \mu) \end{aligned} \quad (5)$$

となる。ただし、 $\gamma_k = \Gamma(k - d) / (\Gamma(k + 1)\Gamma(-d))$ であり、

$$\tilde{\gamma}_k = \sum_{j=0}^k \gamma_j \theta^{k-j} - \phi \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j \theta^{k-1-j} \quad (6)$$

と置いた。

SVL-ARFIMA $(1, d, 1)$ モデルの未知パラメータ $(\phi, \theta, \sigma_\eta, \rho, d, \mu)$ をまとめて $\boldsymbol{\vartheta}$ で表すと、このモデルの尤度関数 $L(\boldsymbol{\vartheta})$ は次のように表される。

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\vartheta}) &= \int \cdots \int f(\mathbf{y}|\mathbf{h}) f(\mathbf{h}|\boldsymbol{\vartheta}) d\mathbf{h} \\ &= \int \cdots \int \prod_{t=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi z_t \exp(h_t)}} \exp \left[-\frac{y_t^2}{2 \exp(h_t)} \right] \\ &\quad \times \prod_{t=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2} \sqrt{1 - \rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_\eta^2(1 - \rho^2)} \left\{ h_{t+1} - \mu - \sum_{k=1}^t \tilde{\gamma}_k (h_{t-k} - \mu) - \rho\sigma_\eta y_t \exp(-h_t/2) \right\}^2 \right] \\ &\quad \times \frac{\sqrt{1 - \phi^2}}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2}} \exp \left[-\frac{(1 - \phi^2)(h_1 - \mu)^2}{2\sigma_\eta^2} \right] dh_1 \cdots dh_n. \end{aligned} \quad (7)$$

この積分が解析的に解けないため、SVL モデルのパラメータは最尤推定することが難しく、最尤法に代わる推定法が必要になる。ここでは、NUTS を利用した HMC 法を用いて、ベイズ推定により SVL-ARFIMA $(1, d, 1)$ モデルのパラメータ推定を行なう。

²⁾この二項展開は、 $(1 - L)^d = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k L^k$ となり、無限級数である。しかし、データ数は有限なので、有限の項までの和で近似するのが AR 近似である。

3. 実証分析

(1) データ

本稿では、Oxford Realized Library³⁾ から取得した日経平均株価のデータを用いる。データの観測期間は、2015 年 1 月 5 日から 2019 年 12 月 30 日までである。日次対数収益率 y_t は、 t 時点の日経平均株価の終値を S_t とするとき、 $y_t = (\ln S_t - \ln S_{t-1}) \times 100$ (%) として計算を行なった。日経平均株価の日次対数収益率の観測期間は、2015 年 1 月 6 日から 2019 年 12 月 30 日までであり、観測個数は 1,218 である。データの要約統計量は、表 1 にまとめられている。

表 1: 日経平均株価の日次対数収益率の要約統計量

2015/1/6 – 2019/12/30						
観測個数	平均	標準偏差	歪度	超過尖度	最大値	最小値
1,218	0.0252	1.2277	-0.3396	6.1086	7.4262	-8.2529

(2) 計算条件

NUTS を利用した HMC 法によるベイズ推定においては、稼働検査期間として最初の 5,000 個を捨てた後、20,000 個の確率標本を発生させ 2 つおきに合計 10,000 個の結果を用いた。また、チェーン数は、3 である。なお、本稿における数値計算は、全て C 言語を用いている。パラメータの事前分布は、次の通りである。

$$\begin{aligned} \mu &\sim N(0, 1), \quad \frac{1+\phi}{2} \sim \text{beta}(1, 1), \quad \frac{1+\theta}{2} \sim \text{beta}(1, 1), \\ \frac{1+\rho}{2} &\sim \text{beta}(1, 1), \quad \sigma_\eta^2 \sim \text{IG}\left(\frac{5}{2}, \frac{0.05}{2}\right), \quad \frac{1+2d}{2} \sim \text{beta}(1, 1). \end{aligned}$$

ここで、 N は正規分布、 beta はベータ分布、 IG は逆ガンマ (Inverse Gamma) 分布を表す。

(3) 推定結果

図 1 に NUTS によるベイズ推定により得られた SVL-ARFIMA モデルの標本自己相関関数、標本経路、事後確率分布を示す。標本自己相関関数は、いずれのパラメータにおいても十分に減衰していることが分かる。また、いずれのパラメータの標本経路も安定した軌跡を示しており、状態空間全体を万遍なく推移しているといえる。さらに、事後確率分布からも、安定分布に収束していることを確認できる。また、事後確率分布は、単峰型の分布をしていることが見て取れる。

³⁾詳しくは、Heber *et al.* (2009) を参照のこと。

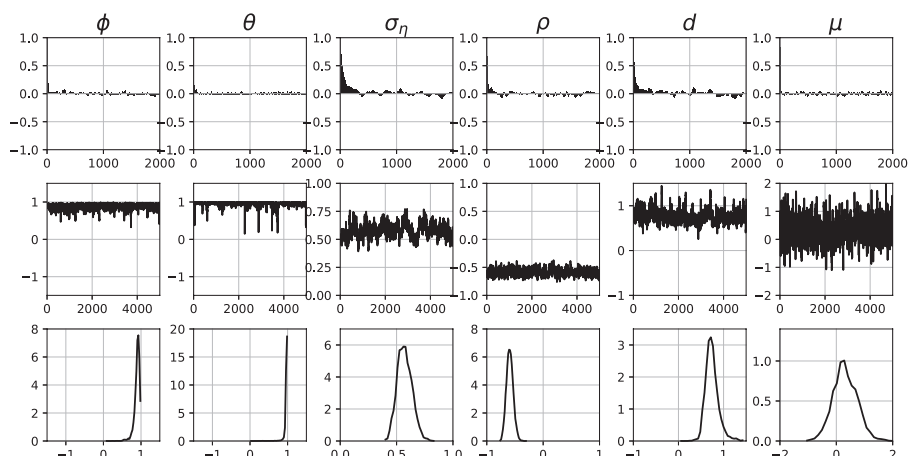


図 1: 日経平均株価を用いた SVL-ARFIMA $(1, d, 1)$ モデルの推定結果
標本自己相関関数 (上段), 標本経路 (中段), 事後確率分布 (下段).

表 2: 日経平均株価による SVL-ARFIMA モデルの G-R 統計量

	$(0, d, 0)$	$(1, d, 0)$	$(0, d, 1)$	$(1, d, 1)$
ϕ		1.0001		1.0001
θ			1.0000	1.0002
σ_η	1.0005	1.0010	1.0001	1.0007
ρ	1.0003	1.0004	1.0001	1.0009
d	1.0000	1.0002	1.0000	1.0001
μ	1.0000	1.0007	1.0001	1.0003

表 2 に, 日経平均株価による SVL-ARFIMA モデルの Gelman-Rubin (G-R) 統計量を示す. G-R 統計量が 1 に近い場合, 連鎖が安定分布に収束していると判断される. 本稿では, 1.05 を閾値として用いる. 表 2 から, SVL-ARFIMA モデルの全てのパラメータにおいて, G-R 統計量が 1.05 以下であることがわかる. 図 1 と表 2 の結果から, 日経平均株価を用いて得られた標本経路は不変分布に十分に収束しているといえる.

表 3 に, 日経平均株価を用いた SVL-ARFIMA モデルにおける各パラメータの事後平均, 事後標準偏差, 95 % 信用区間, 非効率性因子を示す. 表 3 から, 長期記憶を示すパラメータ d の事後平均は, 全てのモデルで 0 以上なので, ボラティリティは長期記憶性を示すことが示唆される. また, ρ の事後平均は, 全てのモデルでマイナスの値であり, 95 % 信用区間も 0 を含まないことから, 従来の用いられていた AR モデルによる SVL モデルと同様に 非対称・レバレッジ効果の存在を示唆している. 対数周辺尤度 (Log Marginal Likelihood; 以下, LML) の値から, $(1, d, 1)$ モデルが最も当てはまりがよいことがわかる. しかし, d の事後平均は, 0.4430 で 0.5 以下であるが, 95 % 信用区間が 0.5 を含むため, 非

表 3: 日経平均株価による SVL-ARFIMA モデルのパラメータの推定結果

1 行目: 事後平均および事後標準偏差, 2 行目: 95% 信用区間, 3 行目: 非効率因子.
LML の括弧内は推定された標準偏差.

	(0, d , 0)	(1, d , 0)	(0, d , 1)	(1, d , 1)
ϕ		-0.0410 (0.0750) [-0.1807, 0.1091]		0.7380 (0.1135) [0.4755, 0.9146]
		2.71		7.93
θ			0.2640 (0.1438) [0.0356, 0.5837]	0.6359 (0.1735) [0.2209, 0.8881]
			17.83	9.27
σ_η	1.0546 (0.0668) [0.9218, 1.1843]	1.0691 (0.0812) [0.9348, 1.2112]	0.9154 (0.3114) [0.7053, 1.1133]	0.7281 (0.0981) [0.5821, 0.9439]
	11.44	5.52	7.38	27.07
ρ	-0.2743 (0.0579) [-0.3884, -0.1599]	-0.2708 (0.0597) [-0.3852, -0.1530]	-0.3894 (0.0821) [-0.5523, -0.2297]	-0.4574 (0.0780) [-0.6111, -0.3070]
	5.51	3.86	7.31	8.24
d	0.1254 (0.0414) [0.0450, 0.2040]	0.1494 (0.0637) [0.0450, 0.2596]	0.5435 (0.0873) [0.3971, 0.7378]	0.4430 (0.1267) [0.2197, 0.7196]
	3.29	3.53	8.33	9.07
μ	-0.0978 (0.1103) [-0.3136, 0.1209]	-0.0894 (0.1206) [-0.3255, 0.1446]	0.2083 (0.4623) [-0.6683, 1.1383]	0.1920 (0.) [-0.4894, 0.9924]
	6.37	7.40	9.98	19.78
LML	-3392.50 (2.57)	-3420.60 (3.04)	-3099.64 (2.01)	-2801.20 (6.29)

定常である可能性がある。

4. まとめ

本稿では, NUTS を用いて日経平均株価による SVL-ARFIMA モデルのベイズ推定を行なった. NUTS による推定方法は, 非効率性因子から, 他のベイズ推定法と比較しても十分に効率の良い推定法であることが示された. また, SVL-ARFIMA モデルの推定結果から, ボラティリティは長期記憶性を示すことが明らかとなった. さらに, 対数周辺尤度の値から, もっとも当てはまりが良いモデルは, SVL-ARFIMA (1, d , 1) モデルであることがわかった. しかし, 推定された d の 95 % 信用区間は 0.5 を含むため, ボラティリティを表す ARFIMA (1, d , 1) 過程は非定常の可能性があることが示唆された. ボラティリティの非定常についての検証は, 今後の課題である.

参考文献

- [1] Beran, J. (1995), “Maximum Likelihood Estimation of the Differencing Parameter for Invertible Short and Long Memory Autoregressive Integrated Moving Average Models,” *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B* Vol. 57, pp. 659–672.
- [2] Heber, G., Lunde, A., Shephard, N., and Sheppard, K. (2009), “Oxford-Man Institute’s Realized Library,” Version 0.3. Oxford-Man Institute, University of Oxford.
- [3] Takahashi, M., Omori, Y., and Watanabe, T. (2023), “Stochastic Volatility and Realized Stochastic Volatility Models,” Springer.

本資料に関する著作権は、株式会社大阪取引所にあります。

本資料の一部又は全部を無断で転用、複製することはできません。

本資料の内容は、株式会社大阪取引所の意見・見解を示すものではありません。

本資料は、デリバティブ商品の取引の勧誘を目的としたものではありません。

筆者および株式会社大阪取引所は、本資料に基づく投資あるいは類似の行為により発生した如何なる損失や損害に対して、一切の責任を負うものではありません。