日経 225 先物と日経平均株価の収益率とボラティリティの関係について

創価大学経済学部教授 浅井　学

1　はじめに

日経 225 先物取引とは、日経平均株価（日経 225）を原資産とする株価指数先物取引であり、大阪取引所等に上場されている。本稿では、高頻度データを用いて、日経 225 と先物価格における収益率同士またボラティリティ同士の理論的な関係性を検証してみたい。

本稿の構成は以下の通りである。第 2 節で、高頻度データによる推定方法として近年用いられている Barndorff-Nielsen et al. (2008) (以下 BHLS) のアプローチを紹介する。第 3 節では、原資産と先物価格の理論的な関係性から検証したい仮説を明らかにする。第 4 節では、実証分析の結果を示し、今後の研究課題について述べる。

2　ボラティリティの推定方法

時点 t における資産価格の対数値を Y_t とする。BHLS (2008) では、この Y_t を BMSJ 過程（Brownian semimartingale plus jump process）で記述している。時点 t における 2 次変動（QV, quadratic variation）は、任意の確定的な分割 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \tau$ に対して

$$[Y]_t = \operatorname{plim} \sum_{j=1}^{t_j \le t} \left(Y_{t_{j+1}} - Y_{t_j} \right)^2$$

で定義される。ただし、$n \to \infty$ のとき $\sup_j \{t_{j+1} - t_j\}$ と仮定する。本稿では、この QV をボラティリティと呼ぶ[1]。

いま Y_{t_j} について、マイクロ・ストラクチャー・ノイズを含んだ値を $X_{t_j} = Y_{t_j} + U_{t_j}$ とする。ただし、ノイズ U_{t_j} の平均はゼロで、分散は一定であるとする。この高頻度データ $X_{t_0}, \ldots, X_{t_n}$ を用いて、日次のボラティリティQV を推定するために BHLS (2008) は次のような推定方法を提案した。非負の値をとる推定量として

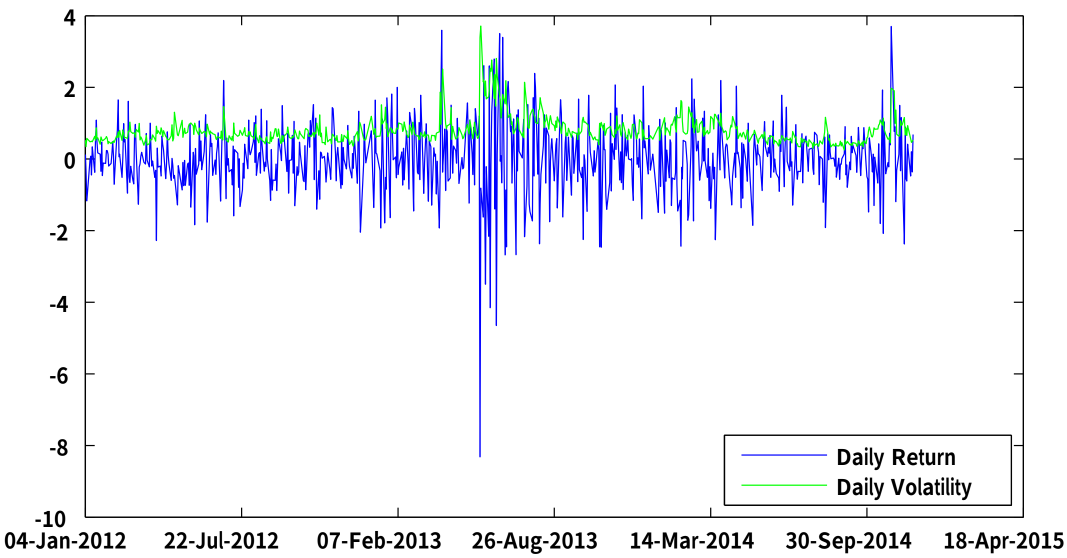
$$K(X) = \sum_{h=-H}^{H} k\left(\frac{h}{H+1}\right) \gamma_k, \quad \gamma_k = \sum_{j=|h|+1}^{n} x_j x_{j-|h|} \tag{1}$$

を考える。ただし、$k(x)$ はカーネル・ウェイト関数である。BHLS (2008) は様々なカーネル・ウェイト関数を考えているが、本稿では BHLS (2009) にならい Parzen カーネル関数

$$k(x) = \begin{cases} 1 - 6x^2 + 6x^3 & 0 \le x \le 1/2 \\ 2(1-x)^3 & 1/2 \le x \le 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

を使用する。ここで x_j を高頻度データの時間間隔 $[t_{j-1}, t_j]$ における収益率とすると、$K(X)$ は $[Y]_t$ の推定量となる。この推定量は、リアライズド・カーネルと呼ばれる。

図 1: 日経 225 の日次収益率とボラティリティ



リアライズド・カーネルは、共分散行列の推定量として広く知られている HAC (heteroskedasticity and autocorrelation consistent) 推定量[2]とよく似た形をしている。ただし、HAC 推定量と異なり、リアライズド・カーネルは標本の大きさで基準化していない。

BHLS (2008) は、$n \to \infty$ のときリアライズド・カーネル $K(X)$ はボラティリティ $[Y]_t$ の一致推定量となることを証明している。適切な H の選択については BHLS (2008, 2009) を参照されたい。

3　原資産価格と先物価格の関係

時点 t における原資産価格を S_t とし、満期までの期間が T の先物価格を F_t とすると、その理論価格は

$$F_t = S_t e^{-(\delta - r)T} \tag{2}$$

で与えられる。ただし、r は安全資産の利子率で、δ は予想配当利回りである。また、T は満期までの日数を年間営業日数（ここでは 250 日とする）で割った値とする。ここでは (2) 式をもとに、原資産価格と先物価格の関係性を収益率とボラティリティの両方から考えてみたい。まず、時点 t において、原資産の始値と終値から計算した収益率を R_t とし、先物価格の収益率を f_t とする[3]。このとき上式は近似的に

$$f_t = R_t - (\delta - r)T$$

[1]例えば、BHLS (2008, 2009) のサーベイを参照されたい。

[2]例えば、Newey and West (1987) や Andrews (1991) を参照されたい。

[3]リアライズド・カーネルを含めリアライズド・ボラティリティの分析では、前日の終値と当日の終値を用いて日次収益率を計算するよりも、当日の始値と終値から収益率を計算するほうが適切であることがわかっている。例えば、Hansen et al. (2012) を参照されたい。

表 1: (3) 式の回帰モデルの推定結果

被説明変数	説明変数 定数項	R_t	$-T$	$\bar{R}^2$	ロバスト F 検定
f_t^{201203}	-0.0644	1.0307	-0.2773	0.9161	35.377
	(0.0001)	(0.0001)	(0.0109)		[0.0000]
f_t^{201206}	0.0065	0.9906	0.1186	0.8849	2.4506
	(6.48×10^{-5})	(4.64×10^{-5})	(0.0007)		[0.2937]
f_t^{201209}	-0.0493	0.9679	-0.2907	0.9034	93.591
	(4.72×10^{-5})	(2.38×10^{-5})	(0.0012)		[0.0000]
f_t^{201212}	-0.0270	0.9659	-0.0114	0.9050	110.84
	(4.02×10^{-5})	(2.03×10^{-5})	(0.0004)		[0.0000]
f_t^{201303}	-0.0469	0.8874	-0.0964	0.8737	374.42
	(8.77×10^{-5})	(3.39×10^{-5})	(0.0011)		[0.0000]
f_t^{201306}	-0.1200	0.9156	-0.2494	0.8934	395.04
	(0.0002)	(2.1413×10^{-5})	(0.0012)		[0.0000]
f_t^{201309}	0.0005	0.9750	0.1764	0.9121	29.721
	(8.49×10^{-5})	(2.12×10^{-5})	(0.0010)		[0.0000]
f_t^{201312}	0.0326	0.9915	0.1357	0.9272	17.566
	(6.13×10^{-5})	(3.39×10^{-5})	(0.0010)		[0.0002]
f_t^{201403}	0.0521	0.8868	0.1558	0.8583	550.42
	(8.80×10^{-5})	(2.38×10^{-5})	(0.0010)		[0.0000]
f_t^{201406}	0.0215	0.8777	0.03056	0.8452	681.52
	(3.67×10^{-5})	(2.21×10^{-5})	(0.0003)		[0.0000]
f_t^{201409}	-0.0370	0.9517	-0.1880	0.8644	152.35
	(2.23×10^{-5})	(2.27×10^{-5})	(0.0005)		[0.0000]
f_t^{201412}	0.0765	0.9363	0.2092	0.9306	636.77
	(3.48×10^{-5})	(2.84×10^{-5})	(0.0004)		[0.0000]

注) f_t の右肩の数字は、取引終了となる月を示す。ロバスト F 検定は、$\alpha=0$ かつ $\beta=1$ という仮説に対する F 検定統計量であり、漸近的に自由度 2 のカイ 2 乗分布に従う。丸括弧内には、HAC 推定量による標準誤差が示されている。鉤括弧内には、検定統計量の P 値が示されている。

と書くことができる。ここで回帰モデル

$$f_t = \alpha_r + \beta_r R_t + \gamma_r(-T) + \varepsilon_t \tag{3}$$

を考えると、制約 $\alpha_r = 0$ かつ $\beta_r = 1$ が成り立つと予想される。また γ_r の推定値は $(\delta - r)$ の推定値と解釈できる。ただし、ε_t は誤差項である。

次に、時点 t において原資産のボラティリティの推定値を RK_t とし、先物価格のボラティリティの推定値を RK_t^f とする。このとき RK_t^f は RK_t だけでなく満期までの影響を含んでいると考えられる。したがって、回帰モデル

$$RK_t^f = \alpha_v + \beta_v RK_t + \gamma_{v1}T + \gamma_{v2}T^2 + v_t \tag{4}$$

を考えると、制約 $\alpha_v = 0$ かつ $\beta_v = 1$ が成り立つと予想される。ここで v_t は誤差項である。

本稿では、日経 225 と日経 225 先物価格のデータを用いて、回帰モデル (3)(4) により実証分析を行う。これらの回帰モデルのパラメータを推定する場合は、系列相関や不均一分散に注意して共分

表 2: (4) 式の回帰モデルの推定結果

	説明変数					
被説明変数	定数項	RK_t	T	T^2	$\bar{R}^2$	ロバスト F 検定
RK_t^{201203}	−0.0271	1.6306	0.7174	−0.5520	0.9146	389.60
	(0.0001)	(0.0017)	(0.2606)	(5.7535)		[0.0000]
RK_t^{201206}	−0.0688	1.1710	1.6999	−3.6927	0.9249	92.246
	(0.0003)	(0.0004)	(0.0118)	(0.0392)		[0.0000]
RK_t^{201209}	0.2945	1.0652	0.4875	−3.6937	0.9362	643.32
	(0.0002)	(0.0004)	(0.0178)	(0.0885)		[0.0000]
RK_t^{201212}	0.2627	1.2009	0.3039	−2.2745	0.9293	1305.1
	(0.0001)	(0.0002)	(0.0071)	(0.0253)		[0.0000]
RK_t^{201303}	0.2527	1.0340	0.9183	−3.4820	0.9378	997.40
	(0.0003)	(0.0005)	(0.0105)	(0.0420)		[0.0000]
RK_t^{201306}	0.1276	1.0433	−0.2638	0.3662	0.9673	139.04
	(0.0017)	(8.30×10^{-5})	(0.0766)	(0.1753)		[0.0000]
RK_t^{201309}	0.3425	1.1760	−1.4416	0.9773	0.9548	2359.0
	(0.0002)	(0.0002)	(0.0335)	(0.1246)		[0.0000]
RK_t^{201312}	0.2152	1.1777	0.4865	−2.1182	0.9653	1243.3
	(0.0001)	(0.0002)	(0.0138)	(0.0652)		[0.0000]
RK_t^{201403}	0.3506	0.9952	−0.9590	1.4600	0.9341	1482.5
	(0.0002)	(0.0002)	(0.0095)	(0.0433)		[0.0000]
RK_t^{201406}	0.2048	0.9990	0.5594	−1.6682	0.9402	1862.7
	(2.53×10^{-5})	(0.0001)	(0.0038)	(0.0110)		[0.0000]
RK_t^{201409}	0.1166	1.1377	0.4779	−1.5226	0.9220	781.47
	(5.70×10^{-5})	(0.0004)	(0.0047)	(0.0251)		[0.0000]
RK_t^{201412}	−0.0581	1.3572	0.7068	−1.5981	0.9684	1681.3
	(6.71×10^{-5})	(8.17×10^{-5})	(0.0024)	(0.0060)		[0.0000]

注) f_t の右肩の数字は、取引終了となる月を示す。ロバスト F 検定は、$\alpha = 0$ かつ $\beta = 1$ という仮説に対する F 検定統計量であり、漸近的に自由度 2 のカイ 2 乗分布に従う。丸括弧内には、HAC 推定量による標準誤差が示されている。鉤括弧内には、検定統計量の P 値が示されている。

散行列に HAC 推定量使う必要がある。また上記のような制約を検定する場合は、例えば HAC 推定量によるロバスト F 統計量を使えばよい。

4　実証分析

データとして、日経 225 の 15 秒間隔データと日経 225 先物価格の 1 分足データを用いて、日次の収益率とボラティリティを計算した[4]。期間は 2012 年 1 月 4 日から 2014 年 10 月 31 日である。日経 225 の限月は 3 月・6 月・9 月・12 月であるので、2012 年から 2014 年の各限月で取引の終了する 12 商品を分析対象とした。日経 225 の立会時間は、日中取引と夜間取引に分かれるが、簡単のため日中取引のみを扱う。日次収益率の計算には、Hansen et al. (2012) に従って、始値と終値から日次収益率を計算した。また、第 2 節で紹介したようにリアライズド・カーネルを使って、日次ボラティリティを推定した。図 1 には、日経 225 の収益率とボラティリティが示されている。

[4]日経 225 のデータは日本経済新聞社インデックス事業室より、先物価格のデータは大阪取引所より提供して頂いた。

表 1 には、収益率同士の関係性について、(3) 式の回帰モデルを推定した結果が示されている。この結果を見ると、係数はすべて 1%水準で有意である。定数項 α の推定値はゼロに近く、R_t の係数 β の推定値は 1 に近いが、仮説「$\alpha = 0$ かつ $\beta = 1$」は満期が 2012 年 6 月のケースを除きすべて有意水準 1%で棄却される。$(\delta - r)$ の推定値は、半分のケースでプラスの値を取り、残りの半分はマイナスであった。

表 2 は、ボラティリティ同士の関係性を見るために、(4) 式の回帰モデルを推定した結果である。表 2 より、定数項と RK_t の係数はすべて有意である。定数項の推定値 α は大きくゼロから外れているが、RK_t の係数 β の推定値はおおむね 1 に近い。いずれにせよ、仮説「$\alpha = 0$ かつ $\beta = 1$」はすべて有意水準 1%で棄却される。本稿では詳述しないが、仮説「$\gamma_{v1} = \gamma_{v2} = 0$」についてロバストな F 検定を行った結果もすべて有意であった。

本稿の分析から日経 225 の先物と原資産について、収益率同士またボラティリティ同士に密接な関係があることがわかった。特に、ボラティリティ同士の関係性から新たなボラティリティ予測モデルの構築できる可能性がある。最終取引日ごとに考えるとき、先物価格のデータが連続して入手できるのは 6ヶ月程度であり、これまで複雑なボラティリティ予測モデルを構築することは困難であった。しかし、原資産である日経 225 のボラティリティの予測値と組み合わせることで、より複雑なモデルを構築することも可能である。今後は、Asai et al. (2012) のモデルも含めて様々なボラティリティ予測モデルを検討し、先物価格の収益率のボラティリティ予測モデルを構築していきたい。

参考文献

Asai, M., M. McAleer and M. Medeiros (2012), “Asymmetry and Long Memory in Volatility Modeling”, *Journal of Financial Econometrics*, **10**, 495–512.

Andrews, D.W.K. (1991), “Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimation”, *Econometrica*, **59**, 817–858.

Barndorff-Nielsen, O.E., P.R. Hansen, A. Lunde, and N. Shephard (2008), “Designing Realised Kernels to Measure the Ex-Post Variation of Equity Prices in the Presence of Noise”, *Econometrica*, **76**, 1481–1536.

Barndorff-Nielsen, O.E., P.R. Hansen, A. Lunde, and N. Shephard (2009), “Realised Kernels in Practice: Trades and Quotes”, *Econometrics Journal*, **12**, C1–C32.

Hansen, P.R., Z. Huang, and H.H. Shek (2012), “Realized GARCH: A Complete Model of Returns and Realized Measures of Volatility”, *Journal of Applied Econometrics*, **27**, 877–906.

Newey, W.K., and K.D. West (1987), “A Simple Positive Semi-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix”, *Econometrica*, **55**, 703–708.