日経 225 先物のボラティリティ予測について

創価大学経済学部教授 浅井　学

1　はじめに

日経 225 先物取引とは、日経平均株価（日経 225）を原資産とする株価指数先物取引であり、大阪取引所等に上場されている。浅井 (2015) では、高頻度データを用いて、日経 225 と先物価格における収益率同士またボラティリティ同士の理論的な関係性を検証した。本稿では、浅井 (2015) の実証分析に基づいて、日経 225 先物のボラティリティの新たな予測方法を提案し、検証する。

本稿の構成は以下の通りである。第 2 節で、原資産と先物価格の理論的な関係性から、先物のボラティリティ予測方法を提案する。第 3 節では、原資産のボラティリティ予測モデルを紹介する。これは、先物のボラティリティ予測のために必要なモデルである。第 4 節では、日経 225 と先物価格のデータを用いて、実証分析を行う。また、今後の研究課題について述べる。

2　先物のボラティリティ予測方法

時点 t における原資産価格を S_t とし、満期までの期間が T の先物価格を F_t とすると、その理論価格は

$$F_t = S_t e^{-(\delta - r)T} \tag{1}$$

で与えられる。ただし、r は安全資産の利子率で、δ は予想配当利回りである。また、T は満期までの日数を年間営業日数（ここでは 250 日とする）で割った値とする。ここでは (1) 式をもとに、原資産価格と先物価格の関係性を収益率とボラティリティの両方から考えてみたい。まず、時点 t において、原資産の始値と終値から計算した収益率を R_t とし、先物価格の収益率を f_t とする[1]。このとき上式は近似的に

$$f_t = R_t - (\delta - r)T$$

と書くことができる。ここで回帰モデル

$$f_t = \alpha_r + \beta_r R_t + \gamma_r(-T) + \varepsilon_t \tag{2}$$

を考えると、制約 $\alpha_r = 0$ かつ $\beta_r = 1$ が成り立つと予想される。また γ_r の推定値は $(\delta - r)$ の推定値と解釈できる。ただし、ε_t は誤差項である。同様に、時点 t において原資産のボラティリティの推定値を RK_t とし、先物価格のボラティリティの推定値を RK_t^f とする。このとき RK_t^f は RK_t だけでなく満期までの期間の影響を含んでいると考えられる。したがって、回帰モデル

$$RK_t^f = \alpha_v + \beta_v RK_t + \gamma_{v1} T + \gamma_{v2} T^2 + v_t \tag{3}$$

[1] リアライズド・カーネルを含めリアライズド・ボラティリティの分析では、前日の終値と当日の終値を用いて日次収益率を計算するよりも、当日の始値と終値から収益率を計算するほうが適切であることがわかっている。例えば、Hansen et al. (2012) を参照されたい。

を考えると、制約 $\alpha_v = 0$ かつ $\beta_v = 1$ が成り立つと予想される。ここで v_t は誤差項である。

浅井 (2015) では、Barndorff-Nielsen et al. (2008) のリアライズド・カーネルを使って、日経 225 と日経 225 先物の収益率について日次のボラティリティを推計し、実証分析を行った。浅井 (2015) の分析結果から、上記のような制約は成り立っていないものの説明力が非常に高いことがわかった。12 種類の満期のデータについて、収益率のモデルでは自由度調整済み決定係数は 0.84 以上あり、ボラティリティのモデルでは 0.91 以上であった。この結果を踏まえて、原資産収益率のボラティリティの予測値と残存期間のデータを使った先物収益率のボラティリティ予測モデルを提案する。

原資産の取引時点 t $(t = 1, 2, \dots)$ に対応して、先物価格の取引開始時点の前日を $t = n_0$ とし、満期を $t = n = n_0 + n_f$ とする。したがって先物の取引期間の長さは n_f である。

ステップ 1 原資産について、収益率のボラティリティの推計値 RK_t $(t = 1, \dots, n_0)$ を用いて、1 期先の予測値 $\widehat{RK}_{n_0+1}$ を求める。標本の大きさを n_0 に固定したまま 1 期進み、次の予測値を求める。この作業を $q + 1$ 回繰り返し、1 期先の予測値 $\widehat{RK}_{n_0+h}$ $(h = 1, 2, \dots, q + 1)$ を得る。

ステップ 2 先物価格の収益率について、日次のボラティリティ $RK^f_{n_0+h}$ $(h = 1, 2, \dots, q)$ を求める。次に回帰モデル

$$RK^f_t = \alpha_v + \beta_v \widehat{RK}_t + \gamma_{v1} T + \gamma_{v2} T^2 + v_t, \quad (t = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots, n_0 + q) \tag{4}$$

を使って、パラメータを推計する。これにより、先物収益率のボラティリティの予測値 $\widehat{RK}^f_{n_0+q+1}$ を求めることができる。

ステップ 3 新たなボラティリティ推計値が得られるたびに q の値を増やし、$q = n_f - 1$ となるまでステップ 1 とステップ 2 の予測値を更新する。

本稿の実証分析では $q = 5$ からスタートする。

3 原資産のボラティリティ予測モデル

金融資産の収益率のボラティリティをモデル化する際には、Engle (1982) の ARCH モデルから派生した条件付き不均一分散モデルや確率的ボラティリティ変動モデルが広く用いられている。例えばサーベイ論文として McAleer (2005) を参照してほしい。また近年、リアライズド・ボラティリティやリアライズド・カーネルのように、ボラティリティの実現値を使ったモデルも使われている。本稿では、浅井 (2015) に基づきリアライズド・カーネルを使ってモデル化を考える。

確率的ボラティリティ変動モデルではボラティリティを潜在変数として扱っていたが、ボラティリティの実現値をそのまま使う場合は、真のボラティリティと実現値の間に当然誤差が生じる。Barndorff-Nielsen and Shephard (2002) は、これを「実現ボラティリティ誤差」と呼び、パラメータの推定結果にバイアスが生じることを示した。ただし、Asai et al. (2012a) のシミュレーション結果が示しているように、予測モデルを考える場合は「実現ボラティリティ誤差」の影響は軽微である。

近年の研究では、金融資産収益率のボラティリティをモデル化する際に、非対称性と長期記憶性が取り入れられている[2]。Asai et al. (2012b) の長期記憶型非対称確率的ボラティリティ変動モデル

[2] ジャンプを取り入れる研究も増えてきているが、簡単なモデルでの検証を考えているため、ここでは扱わない。

（Stochastic Volatility model with Asymmetry and Long memory, ALSV）の応用として、本稿では

$$R_t = V_t^{1/2} z_t, \quad z_t \sim iid(0,1), \tag{5}$$

$$(1-\phi L)(1-L)^d(\ln V_t - \mu) = \lambda_1 z_{t-1} + \lambda_2(z_{t-1}^2 - 1) + \eta_t, \quad \eta_t \sim iid(0, \sigma_\eta^2) \tag{6}$$

を考える。ただし L はラグ・オペレータであり、d は長期記憶性パラメータである。ボラティリティの式の右辺の $\lambda_1 z_t + \lambda_2(z_t^2 - 1)$ はエルミート多項式の 2 次近似になっていることに注意してほしい。仮定により、右辺の期待値はゼロで、分散は一定であるので、右辺は ARIMA(1,d,0) モデルの誤差項とみなすことができる。なお、定常性と反転可能性のために $|\phi| < 1$ および $|d| < 1/2$ を仮定する。ボラティリティの実現値を用いるため、実証分析では $V_t = RK_t$ および $z_t = R_t/\sqrt{RK_t}$ とする。推定には、2 段階推定法を用いる。第 1 段階で局所 Whittle 推定量 (Local Whittle estimator) により長期記憶性パラメータを推定し、第 2 段階で OLS により残りのパラメータを推定する。

比較の対象として、Corsi (2009) の非斉次自己回帰 (Heterogeneous AutoRegression, HAR) モデルと Bollerslev and Mikkelsen (1996) の FIEGARCH(fractionally-integarted exponential generalized ARCH) モデルを拡張したモデルを用いる。まず Corsi (2009) に沿って、過去 h 期間にわたる V_t の平均値を $(V)_{t-1:t-h} = h^{-1}\sum_{i=1}^{h} V_{t-i}$ と定義する。本稿では、非対称 HAR(HAR-A) モデルとして

$$RK_t = \alpha_c + \beta_d RK_{t-1} + \beta_w (RK)_{t-1:t-5} + \beta_m (RK)_{t-1:t-22} + \lambda_1 R_{t-1} + \lambda_2 R_{t-1}^2 + u_t \tag{7}$$

を考える[3]。ここで、$(RK)_{t-1:t-5}$ と $(RK)_{t-1:t-22}$ は、それぞれ 1 週間の平均と 1ヶ月の平均を表していることに注意してほしい。またモデルは制約付き AR(22) モデルと解釈できるので、通常の分析で用いられるような AR モデルよりも長期にわたる効果を捉えることができる。HAR-A モデルの推定には OLS を用いる。また FIEGARCH モデルについては、上記の ALSV モデルを基に考える。ALSV モデルのボラティリティの確率変数 η_t をくと、V_t の値は時点 $t-1$ の情報が与えられれば確定する。これにより、ARCH 型の条件付き分散モデルに退化させることができる[4]。モデルは擬似最尤法により推定できる。

本稿では、原資産の収益率のボラティリティ予測モデルとして、RK-ALSV モデル、RK-HAR-A モデルおよび FIEGARCH モデルを用いる。次節では、これらのモデルで日経 225 の収益率のボラティリティを予測し、その予測値を使って日経 225 先物の収益率のボラティリティを予測する。

4 実証分析

データとして、日経 225 の 15 秒間隔データと日経 225 先物価格の 1 分足データを用いて、日次の収益率とボラティリティを計算した[5]。これは浅井 (2015) で用いられているデータである。期間は 2012 年 1 月 4 日から 2014 年 10 月 31 日である。日経 225 先物の限月は 3 月・6 月・9 月・12 月であるので、標本期間の後半の満期が 2013 年 9 月・12 月および 2014 年 3 月・6 月・9 月・12 月について、ボラティリティ予測を行う。

[3] HAR-A モデルには、Martens et al. (2009) のように指示関数を用いる特定化もある。

[4] 通常の FIEGARCH と異なるのは、リバレッジ効果の特定化だけである。もとの Bollerslev and Mikkelsen (1996) は Nelson (1991) と同様に絶対値を使っている。

[5] 日経 225 のデータは日本経済新聞社インデックス事業室より、先物価格のデータは大阪取引所より提供して頂いた。

表 1: 日経 225 収益率のボラティリティの 1 期先予測の結果

(a) 平均平方予測誤差

データ	FIEGARCH	RK-HAR-A	RK-ALSV
RK	25.891	19.569	18.213

(b) Diebold-Mariano 検定

モデル 1	モデル 2	検定統計量	P 値
FIEGARCH	RK-HAR-A	−1.6890	0.0456
FIEGARCH	RK-ALSV	−3.3660	0.0004
RK-HAR-A	RK-ALSV	−1.6684	0.0476

まず $n_0 = 250$ として、RK-ALSV モデル、RK-HAR-A モデルおよび FIEGARCH モデルについて、2013 年 3 月 1 日以降の日経 225 のボラティリティの 1 期先予測値を求めた。平均平方予測誤差 (RMSFE) は、FIEGARCH モデル、RK-HAR-A モデル、RK-ALSV モデルの順に小さくなっている。また、2 つの異なるモデルの予測値に差があるかどうかを検証するために Diebold and Mariano (1995) の検定を行った。3 つのモデルに関して、すべての組み合わせで「予測値に差はない」という帰無仮説は有意水準 5%で棄却された。

表 2: 日経 225 先物の収益率のボラティリティの 1 期先予測の平均平方誤差

データ	AR(1)-A	FIEGARCH	RK-HAR-A	RK-ALSV
RK^{201309}	31.580	29.981	27.223	27.105*
RK^{201312}	21.636	23.480	23.308	17.826**
RK^{201403}	7.9803	8.3802	7.4992	6.2840*
RK^{201406}	6.1994	6.3315	6.4050	5.1506
RK^{201409}	6.8921	8.9260	4.9410	4.0989
RK^{201412}	6.0217	5.7820	5.8207	4.9519*

注) RK^f の右肩の数字は、取引終了となる月を示す。また* (**) は RK-ALSV の予測値と、2 番目に平均平方予測誤差が小さいモデルの予測値が有意水準 5%(1%) で異なることを示す。

次に第 2 節で説明したアプローチで、日経 225 先物の収益率のボラティリティの 1 期先予測値を求めた。その際、先物のボラティリティについて、単純な AR(1) モデルに先物の収益率による非対称性を考慮した項を含めたモデル (AR(1)-A) も予測モデルとして比較対象に含めた。6 種類の満期があるが、いずれの場合も RK-ALSV モデルによる平均平方予測誤差が最も小さかった。さらに 6 種類の満期のうち 4 種類について、RK-ALSV の予測値と、2 番目に平均平方予測誤差が小さいモデルの予測値が有意に異なっていた。

本稿の分析から、AR(1)-A モデルで日経 225 先物のボラティリティを予測するよりも、新たに提案した方法のほうが優れていることがわかった。特に、原資産である日経 225 のボラティリティに RK-ALSV を使用するとき、平均平方予測誤差が一番小さくなることがわかった。近年の研究では、ボラティリティのモデル化にジャンプの効果を含める傾向にある。今後は、Andersen et al. (2007)

を参考に予測モデルにジャンプの効果を取り入れていきたい。

参考文献

Andersen, T.G., T. Bollerslev, and F.X. Diebold (2007), "Roughing It Up: Including Jump Components in the Measurement, Modeling and Forecasting of Return Volatility", *Review of Economics and Statistics*, **89**, 701–720.

Asai, M., M. McAleer and M. Medeiros (2012a), "Estimation and Forecasting with Noisy Realized Volatility", *Computational Statistics & Data Analysis*, **56**, 217–230.

Asai, M., M. McAleer and M. Medeiros (2012b), "Asymmetry and Long Memory in Volatility Modeling", *Journal of Financial Econometrics*, **10**, 495–512.

Barndorff-Nielsen, O.E., P.R. Hansen, A. Lunde, and N. Shephard (2008), "Designing Realised Kernels to Measure the Ex-Post Variation of Equity Prices in the Presence of Noise", *Econometrica*, **76**, 1481–1536.

Barndorff-Nielsen, O.E., and N. Shephard (2002), "Econometric Analysis of Realized Volatility and Its Use in Estimating Stochastic Volatility Models", *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **64**, 253–280.

Bollerslev, T. and H.O. Mikkelsen (1996), "Modeling and Pricing Long-Memory in Stock Market Volatility", *Journal of Econometrics*, **73**, 151–184.

Corsi, F. (2009), "A Simple Approximate Long-Memory Model of Realized Volatility", *Journal of Financial Econometrics*, **7**, 174–196.

Diebold, F. and R. Mariano (1995), "Comparing Predictive Accuracy", *Journal of Business & Economic Statistics*, **13**, 253-?263.

Engle, R.F. (1982), "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", *Econometrica*, **50**, 987–1007.

Hansen, P.R., Z. Huang, and H.H. Shek (2012), "Realized GARCH: A Complete Model of Returns and Realized Measures of Volatility", *Journal of Applied Econometrics*, **27**, 877–906.

Martens, M., D. van Dijk, and M. de Pooter (2009), "Forecasting S&P 500 Volatility: Long Memory, Level Sifts, Leverage Effects, Day-of-the-Week Seasonality, and Macroeconomic Announcements", *International Journal of Forecasting*, **25**, 282–303.

McAleer, M. (2005), "Automated Inference and Learning in Modeling Financial Volatility", *Econometric Theory*, **21**, 232–261.

Nelson, D.B. (1991), "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach", *Econometrica*, **59**, 347–370.

浅井 学 (2015),「日経 225 先物と日経平均株価の収益率とボラティリティの関係について」,『先物・オプションレポート』, **27**, 1–5.