局所リスク中立性によるオプション評価の考察

日本大学経済学部教授　三井秀俊

1. はじめに

本稿では, ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) 型モデルを利用してヨーロピアン・オプション評価の実証研究を行なう際に使用される Duan (1995) が提案した局所リスク中立性 (Locally Risk-Neutral Valuation Relationship; LRNVR) に関して概観する. 伝統的なリスク中立性を仮定したモデルに対して, Duan (1995) はリスク中立測度に GARCH (Generalized ARCH) を変換させることにより GARCH モデルによるヨーロピアン・オプション価格付けの方法を発展させた. GARCH モデルだけでなく他の ARCH 型モデルに関しても応用可能[1)]であり, 高頻度データを使用した Realized Volatility や Realized GARCH モデルによるオプション評価に関しても適用することができる[2)].

2. 局所リスク中立性

Duan (1995) は, 離散時間の経済で時点 t での資産価格を S_t とするとき, 1 期間の収益率 $\ln(S_t/S_{t-1})$ が真の確率測度 P の下で条件付きで（情報 Ω_{t-1} が与えられる）正規分布に従うと仮定したモデルを用いた. ボラティリティ σ_t^2 の過程は, GARCH モデルに従うとする.

$$\ln\frac{S_t}{S_{t-1}} = r + \lambda\sigma_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \epsilon_t, \tag{1}$$

$$\epsilon_t|\Omega_{t-1} \sim i.i.d.N(0,\sigma_t^2), \tag{2}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p}\beta_i\sigma_{t-i}^2. \tag{3}$$

ここで, r は無リスク資産利子率 (連続複利), ϵ_t は確率測度 P の下で平均 0, 条件付分散 σ_t^2 の誤差項, λ は一定の単位リスク・プレミアムをそれぞれ表す. Ω_{t-1} は時点 $t-1$ を含む $t-1$ 時点までの利用可能な情報集合である. また, $\alpha_i = 0\ (i = 1,\cdots,q)$, $\beta_j = 0\ (j = 1,\cdots,p)$ とすると, GARCH モデルは離散時間での Black-Scholes モデルと等しくなる.

GARCH オプション価格付けモデルでのリスク中立評価は, 資産収益率過程の分散不均一性を調整するために一般化しなければならない. そこで, Duan (1995) は LRNVR を利用した.

---
1)ARCH 型モデルによる日経 225 オプション評価の実証研究のサーベイとして, 三井 (2014) を参照.
2)詳しくは, Ubukata and Watanabe (2014), Takeuchi-Nogimori (2017) を参照.

定義 **1** 測度 Q が測度 P に関して相互に絶対連続であるならば, 測度 Q は, $S_t/S_{t-1}|\Omega_{t-1}$ が（測度 Q の下で）対数正規に分布し,

$$E^Q\left[\left.\frac{S_t}{S_{t-1}}\right|\Omega_{t-1}\right]=e^r, \tag{4}$$

$$Var^Q\left[\left.\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)\right|\Omega_{t-1}\right]=Var^P\left[\left.\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)\right|\Omega_{t-1}\right] \tag{5}$$

で測度 P に関してほとんど確実 (almost surely) ならば, Locally Risk-Neutral Valuation Relationship (LRNVR) を満足する.

ここで，$E^Q[\cdot]$ は確率測度 Q の下での期待値を表し, $Var^Q[\cdot]$, $Var^P[\cdot]$ は，それぞれ確率測度 Q, P の下での分散を表す．LRNVR の上記の定義では, 観測可能な真の確率測度 P の下で条件付分散過程を推定するため 2 つの測度の下での条件付分散は等しいことが要求される．分散均一対数正規過程の場合, すなわち $p=0$, $q=0$ の場合に, 条件付分散は同一の定数となり LRNVR は単に Risk-Neutral Valuation Relationship (RNVR) となる．LRNVR は 選好と分布との組み合わせの下でリスク中立評価が成立することを証明した Rubinstein (1976) と Brennan (1979) の概念の拡張であると考えることができる.

定理 **1** *LRNVR* は代表的主体が期待効用最大化を行うもので, 効用関数が 時間分離可能 (time separable) で加法的 (additive) であり, 以下の 3 つの条件のいずれか 1 つを満たすならば成立する.

(i) 効用関数は一定の相対リスク回避であり, 対数正規の集計された消費の変化が測度 P の下で一定の平均と分散を持つ正規分布に従う.

(ii) 効用関数は一定の絶対リスク回避であり, 集計された消費の変化が測度 P の下で一定の平均と分散を持つ正規分布に従う.

(iii) 効用関数は線形である.

証明は付録 A 参照.

定理 **2** 確率測度 Q の下では, *LRNVR* は,

$$\ln\frac{S_t}{S_{t-1}}=r-\frac{1}{2}\sigma_t^2+\xi_t, \tag{6}$$

$$\xi_t|\Omega_{t-1}\sim i.i.d.N(0,\sigma_t^2), \tag{7}$$

$$\sigma_t^2=\omega+\sum_{i=1}^{q}\alpha_i(\xi_{t-i}-\lambda\sigma_{t-i})^2+\sum_{i=1}^{p}\beta_i\sigma_{t-i}^2. \tag{8}$$

である.
証明は付録 B 参照.

ここで, リスクは確率測度 Q の下で局所的に中立化されているが, 単位リスク・プレミアム λ はボラティリティの過程に影響を及ぼしている. これは, 局所的なリスク中立化 (local risk neutralization) は大域的なリスク中立化 (global risk neutralization) と等しくはならないことを意味する. また, 上記の定理 2 に関して, GARCH モデル以外にも EGARCH (Exponential GARCH) モデル, GJR (Glosten Jagannathan Runkle) モデル, FIGARCH (Fractionally Integrated GARCH) モデル, FIEGARCH モデル, その他の ARCH 型モデルに対しても容易に適用することができる.

3. オプション評価

オプション価格を求めるには, ある将来時点の期末 T での原資産価格 S_T が必要となる. 期末の原資産価格 S_T は以下の系から導出される[3].

系 **1**

$$S_T = S_t \exp\left[(T-t)r - \frac{1}{2}\sum_{s=t+1}^{T}\sigma_s^2 + \sum_{s=t+1}^{T}\xi_s\right]. \tag{9}$$

無リスク資産利子率により現在価値に割引かれる資産価格は, マルチンゲール (martingale) の性質を持つ.

系 **2** 割引資産価格過程 $e^{rt}S_t$ は, $Q-$ マルチンゲールである[4].

したがって, GARCH (p, q) の定式化の下では, 満期日 T, 権利行使価格 K のヨーロピアン・コール・オプション価格 C_t は, 以下のようになる.

系 **3**

$$C_t = e^{-(T-t)r}E^Q[Max(S_T - K, 0)|\Omega_t]. \tag{10}$$

すなわち, ヨーロピアン・コール・オプション価格は, 満期日 T 時点での原資産価格から権利行使価格を引いた値と 0 との最大値を無リスク資産利子率により現在価値に割引いた値となる.

実際にオプション価格を推定するには (10) 式に対して, モンテカルロ・シミュレーション, Duan and Simonato [1998] の経験的マルチンゲール・シミュレーション (Empirical Martingale Simulation; EMS), Duan *et al.* (1999) の経験的マルチンゲール準モンテカルロ (Empirical Martingale Quasi-Monte Carlo; EMQMC) 等により数値解を導出することができる.

[3]定理 2 より自明である.
[4]系 1 と ξ_t が確率測度 Q の下で平均 0, 分散 σ_t の条件付正規分布に従うことから自明である.

4. まとめ

本稿は, Duan (1995) の LRNVR によるオプション評価に関してサーベイを行なったものである. ARCH 型モデルを利用したオプション価格付けに対して LRNVR は有効であるが, 誤差項が t 分布や非対称分布等を用いると測度変換が困難なことや Markov-Switching (MS) を組み込んだ ARCH 型モデル[5)] に適用するのは難しい等の問題がある.

付録 A: 定理 1 の証明

均衡資産価格は, 標準的な期待効用最大化により以下のオイラー方程式によって与えられる.

$$S_{t-1}=E^P\left[e^{-\rho}\frac{U'(c_t)}{U'(c_{t-1})}S_t\middle|\,\Omega_{t-1}\right].$$

ここで, $U(\cdot)$ は時点 t での効用関数, c_t は時点 t での総消費を表す. また, パラメータ ρ は割引要素 (impatience factor) を表す. ここで, 2 つの中間補題 (intermediate lemma) を利用する. 測度 P の下で $Y_t=v+Z_t$, v は一定の平均, $Z_t\sim N(0,\sigma_Z^2)$ とする[6)]. また, 測度 Q を以下のように定義する.

$$dQ=e^{(r-\rho)T+\sum_{t=1}^{T}Y_t}dP.$$

このとき, 測度 Q は測度 P に関して相互に絶対連続である.

補題 1 $S_{t-1}=E^P\left[e^{-\rho+Y_t}S_t|\Omega_{t-1}\right]$ ならば, 測度 Q は確率測度であり, いかなる Ω_t- 可測確率変数 W_t に対して,

$$E^Q\left(W_t|\Omega_{t-1}\right)=E^P\left[W_te^{(r-\rho)+Y_t})|\Omega_{t-1}\right]$$

である.

補題 2 $S_{t-1}=E^P\left[e^{-\rho+Y_t}S_t|\Omega_{t-1}\right]$ ならば,

(a) $S_t/S_{t-1}|\Omega_{t-1}$ は測度 Q の下で対数正規に分布する.

(b) $E^Q\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\middle|\,\Omega_{t-1}\right)=e^r.$

(c) 確率測度 Q に関してほとんど確実に,

$$Var^Q\left(\ln\frac{S_t}{S_{t-1}}\middle|\,\Omega_{t-1}\right)=Var^P\left(\ln\frac{S_t}{S_{t-1}}\middle|\,\Omega_{t-1}\right).$$

したがって, 測度 P の下では, 対数の限界代替率は定数と平均 0, 分散一定の正規分布に従っている誤差の和で表すことができる.

---

5) 例えば, MS-GARCH モデルや MS-EGARCH モデル等である.

6) このとき, $\frac{U'(c_t)}{U'(c_{t-1})}=e^{Y_t}$ なり, $S_{t-1}=E^P\left[e^{-\rho+Y_t}S_t|\Omega_{t-1}\right]$ が導かれる.

(i) $\ln \frac{U'(c_t)}{U'(c_{t-1})} = (\lambda_1 - 1) \ln \left(\frac{c_t}{c_{t-1}} \right)$, λ_1は, 相対的リスク回避度係数 (relativerisk aversion coefficient) を表す. $\ln \left(\frac{c_t}{c_{t-1}} \right)$ は, 測度 P の下で正規分布に従うため成立する.

(ii) $\ln \frac{U'(c_t)}{U'(c_{t-1})} = -\lambda_2 (c_t - c_{t-1})$, λ_2は, 絶対的リスク回避度係数 (absolute riskaversion coefficient) を表す. $c_t - c_{t-1}$ が測度 P の下で正規分布に従うため成立する.

(iii) 限界効用が 1 に等しいので成立する.

上記の仮定の下では, 利子率は一定であることに注意する必要がある.

付録 B: 定理 2 の証明

$S_t / S_{t-1} | \, \Omega_{t-1}$ は測度 Q の下で対数正規分布に従うので,

$$\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = v_t + \xi_t$$

と書くことができる. v_t は条件付平均, ξ_t は Q-正規確率変数であり, ξ_t の条件付平均は 0 であり, 条件付分散は決定論的である.

$$\begin{aligned} E^Q \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \middle| \Omega_{t-1} \right) &= E^Q \left(e^{v_t + \xi_t} \middle| \Omega_{t-1} \right) \\ &= e^{v_t + \frac{\sigma_t^2}{2}}. \end{aligned}$$

LRNVR により,

$$\sigma_t^2 = Var^Q \left(\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} \middle| \Omega_{t-1} \right) = Var^P \left(\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} \middle| \Omega_{t-1} \right),$$

$$E^Q \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \middle| \Omega_{t-1} \right) = e^r$$

であるので, $v_t = r_t - \sigma_t^2 / 2$ となる. よって,

$$r + \lambda \sigma_t - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \epsilon_t = r - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \xi_t$$

が成立し, $\epsilon_t = \xi_t - \lambda \sigma_t$ となることから,

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i (\xi_{t-i} - \lambda \sigma_{t-i})^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \sigma_{t-i}^2$$

となる.

参考文献

[1] 三井秀俊 (2014), 「ARCH 型モデルによる日経 225 オプションの実証研究に関するサーベイ」, 日本証券経済研究所『証券経済研究』, 第 87 号, pp.41–60.

[2] Brennan, M. (1979), "The Pricing of Contingent Claims in Discrete Time Models," *Journal of Finance*, 34, pp. 53–68.

[3] Duan, J.-C. (1995), "The GARCH Option Pricing Model," *Mathematical Finance*, 5, pp. 13–32.

[4] Duan, J. -C. and J. -G. Simonato (1998), "Empirical Martingale Simulation for Asset Prices," *Management Science*, 44, pp. 1218–1233.

[5] Duan, J. -C., G. Gauthier and J. -G. Simonato (1999), "An Analytical Approximation for the GARCH Option Pricing Model," *Journal of Computational Finance*, 2, pp.75–116.

[6] Rubinstein, M. (1976), "The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options," *Bell Journal of Economic Management Science*, 7, pp. 407–425.

[7] Takeuchi-Nogimori, A. (2017), "An Empirical Analysis of Nikkei 225 Options Using Realized GARCH Models," *The Economic Review (Keizai Kenkyuu),* Institute of Economic Research, Hitotsubashi University, 68, pp. 97–113.

[8] Ubukata, M. and T. Watanabe (2014), "Pricing Nikkei 225 Options Using Realized Volatility," *Japanese Economic Review*, 65, pp. 431–467.