

ハミルトニアン・モンテカルロ法による 非対称 SV モデルの推定 － 日経 225 先物, TOPIX 先物 － (第 1 回)

日本大学経済学部 戸塚英臣

日本大学経済学部 三井秀俊

1. はじめに

本稿では、ハミルトニアン・モンテカルロ (Hamiltonian Monte Carlo, 以下 HMC) 法¹⁾ について紹介する。さらに、確率的ボラティリティ変動モデル (Stochastic Volatility model, 以下 SV モデル) から発生させたテストデータを用いて HMC 法によるパラメータ推定の有効性について検証を行う。ここで用いた SV モデルは、ボラティリティを観測されない変数として扱い、ボラティリティの対数が自己回帰の線形確率過程に従うとしてモデル化されている。株式市場には、株価収益率とボラティリティとの間の関係として、ある種の非対称な動きがあることが知られている。これはレバレッジ効果と呼ばれ、レバレッジ効果を考慮した非対称 SV モデルを用いて、HMC 法の検証を行う。

2. HMC 法

HMC 法は、Duane *et al.* (1997) によって素粒子物理学の格子 QCD (Quantum Chromo Dynamics) 計算においてゲージ配置を効率よく生成する方法として考案された。その後、時系列データにおける確率過程のパラメータ推定に応用されることとなった²⁾。最初にハミルトン力学について紹介する。

2.1. ハミルトン力学

ハミルトン力学では、系の状態は一般化された座標と運動量 (q_j, p_j) , $(j = 1, \dots, d)$ が張る位相空間の一点に相当し、系の時間発展は位相空間の軌跡で与えられる。この系の時間発展を表す軌跡の方程式がハミルトンの運動方程式、

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad (1)$$

$$\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (2)$$

¹⁾詳しくは、Neal (2011) を参照。

²⁾詳しくは、Takaishi (2013), Nugroho and Morimoto (2015) を参照。

である。 H はハミルトニアンと呼ばれ、系のエネルギーを表し、

$$H(q, p) = \sum_{j=1}^d \frac{p_j^2}{2m_j} + U(q) \equiv K(p) + U(q) \quad (3)$$

と定義され、 $K(p)$ と $U(q)$ は系の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーをそれぞれ表す。また、 m_j は質点の質量である。

2.2. HMC 法

HMC 法の特徴は、複数の確率変数を一度に更新できることが可能なことである。モンテカルロ法で用いられるメトロポリス法も原理的には複数の確率変数を更新することが可能である。しかし、その場合には棄却率が小さくなるため実用上は一度に更新することは困難である。HMC 法には、(3) 式のハミルトニアンが現れるが、これは以下のように定義される。確率分布 $P(\mathbf{q})$ に従う確率変数 $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_d)$ とし、その確率変数を変数とする $O(\mathbf{q})$ の期待値 $E[O]$ は、

$$E[O] = \int O(q_1, \dots, q_d) P(q_1, \dots, q_d) dq_1 \cdots dq_d \quad (4)$$

により求まる。ここで、確率変数 \mathbf{q} に共役な補助変数 $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_d)$ を導入し (4) 式を変形すると、

$$\begin{aligned} E[O] &= \int O(q_1, \dots, q_d) \exp \left[-\sum_{j=1}^d p_j^2/2 + \ln P(q_1, \dots, q_d) \right] dq_1 \cdots dq_d dp_1 \cdots dp_d / Z \\ &= \int O(q_1, \dots, q_d) \exp [-H(q, p)] dq_1 \cdots dq_d dp_1 \cdots dp_d / Z \end{aligned} \quad (5)$$

となる。ここで、 Z は規格化定数であり、

$$Z = \int \exp \left[-\sum_{j=1}^d p_j^2/2 + \ln P(\mathbf{q}) \right] dq_1 \cdots dq_d dp_1 \cdots dp_d \quad (6)$$

と与えられる。(5) 式は $O(q)$ が運動量 p_j に依存しないため、(4) 式と (5) 式の値は等しい。(5) 式のハミルトニアン $H(q, p)$ は、

$$H(q, p) = \sum_{j=1}^d \frac{p_j^2}{2} - \ln P(q) \quad (7)$$

と定義される。(3) 式と (7) 式を比較するとポテンシャルエネルギー U は、

$$U(q) = -\ln P(q) \quad (8)$$

となり、これよりポテンシャルエネルギーは対数尤度関数で与えられることが分かる。ただし、質点の質量は計算上のパラメータなので、ここでは 1 と置いた。

HMC 法による乱数列の発生は以下のステップによって実行される。

1. 新しい乱数の候補 q_{new} を (1)–(2) 式のハミルトンの運動方程式から求める。ただし、ハミルトンの運動方程式は解析的には解けないため、Leapfrog 法で数値的に求める。Leapfrog 法は次の節で説明する。
2. 新しい乱数の候補を次の確率で選択する。

$$r = \min [1, \exp (-H(q^*, p^*) + H(q, p))]. \quad (9)$$

3. 上記のステップを繰り返す。

2.3. Leapfrog 法

(1)–(2) 式のハミルトンの運動方程式は解析的に解けないため、数値的に解く必要がある。HMC 法では時間反転性と体積保存を満足する数値積分法を用いる必要があり、それらを満足する数値積分として Leapfrog 法が用いられる。Leapfrog 法で ϵ のステップサイズで (1)–(2) 式を積分した式は、

$$p_j \left(t + \frac{\epsilon}{2} \right) = p_j(t) - \left(\frac{\epsilon}{2} \right) \frac{\partial U(q(t))}{\partial q_j}, \quad (10)$$

$$q_j(t + \epsilon) = q_j(t) + \epsilon p_j \left(t + \frac{\epsilon}{2} \right), \quad (11)$$

$$p_j(t + \epsilon) = p_j \left(t + \frac{\epsilon}{2} \right) - \left(\frac{\epsilon}{2} \right) \frac{\partial U(q(t + \epsilon))}{\partial q_j} \quad (12)$$

となる。

3. SV モデル

HMC 法の精度を検証するために、ボラティリティが確率的に変動する代表的なモデルである SV モデルを用いる。離散時間 SV モデルは収益率 y_t とボラティリティ $\sigma_t^2 = \exp(h_t/2)$ の過程を以下のように記述する。

$$y_t = \exp(h_t/2)u_t, \quad (13)$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t, \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim i.i.d.\mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix} \right). \quad (15)$$

ここで、 u_t は平均 0、分散 1、 η_t は平均 0、分散 σ_η^2 の正規分布に従う誤差項である。(14) 式は、ボラティリティの対数値が AR(1) プロセス (first-order autoregressive process; 1 次の自己回帰過程) に従うことを示している。株式市場によく見られるある種の非対称な動きをモデルに与えるには (13) 式と (14) 式で u_t と η_t に対して相関関係を考えれば良い。 u_t と η_t とが、相関関係 ρ を持つとして離散時間 SV モデルを構築すると、

$$\begin{pmatrix} u_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim i.i.d.\mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho\sigma_\eta \\ \rho\sigma_\eta & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix} \right) \quad (16)$$

となる. (13)–(15) 式からなるモデルは SV モデル, また (13), (14), (16) 式からなるモデルはレバレッジ効果を含むので SVL モデルとそれぞれ呼ぶこととする. SVL モデル (13), (14), (16) 式の未知パラメータ $(\phi, \sigma_\eta, \rho, \mu)$ をまとめて θ で表すと, SVL モデルの尤度関数は次のように表される.

$$\begin{aligned}
L(\theta) &= \int \cdots \int f(\mathbf{y}|\mathbf{h})f(\mathbf{h}|\theta)d\mathbf{h} \\
&= \int \cdots \int \prod_{j=1}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi \exp(h_t)}} \exp\left[-\frac{y_t^2}{2 \exp(h_t)}\right] \\
&\quad \times \prod_{j=1}^{d-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{\{h_{t+1} - \mu - \phi(h_t - \mu) - \rho\sigma_\eta y_t \exp(-h_t/2)\}^2}{2\sigma_\eta^2(1-\rho^2)}\right] \\
&\quad \times \frac{\sqrt{1-\phi^2}}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2}} \exp\left[-\frac{(1-\phi^2)(h_1 - \mu)^2}{2\sigma_\eta^2}\right] \prod_{j=1}^d dh_j. \tag{17}
\end{aligned}$$

この積分が解析的に解けないため, SV モデルのパラメータは最尤推定することが難しく, 最尤法に代わる推定法が必要になる. ここでは, HMC 法を用いて SV モデルのパラメータ推定を行う.

(5) 式と (17) 式よりハミルトニアンのパテンシャルエネルギー項 U が,

$$U = -\ln f(\mathbf{y}|\mathbf{h})f(\mathbf{h}|\theta) \tag{18}$$

と求まる. 未知パラメータ θ に加え, 潜在変数 $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_d)$ も推定されるパラメータとして取り扱う. このポテンシャルエネルギーを Leapfrog 法の (10)–(12) 式で用いて変数 $\mathbf{q} \equiv (\theta, \mathbf{h})$ の新しい値を求め, (9) 式の棄却率を用いて新しい変数の更新を行う.

4. テストデータによる推定法の精度の検証

本稿では, (13), (14), (16) 式の SVL モデルに基づく時系列を人工的に発生させ, その時系列データに対して HMC 法を用いたベイズ推定を行う. そして得られた推定結果を時系列を発生される際に用いたパラメータの値と比較し, HMC 法の有効性を検証する. 時系列データの発生に用いたパラメータは, $\phi = 0.98$, $\sigma_\eta = 0.2$, $\rho = -0.4$, $\mu = -1.0$ である. HMC 法によるベイズ推定において, 稼働検査期間 (burn-in period) として最初の 10,000 個を捨てた後, 100,000 個の確率標本を発生させ 5 つおきに合計 20,000 個の結果を用いた.

図 1 にベイズ推定により得られた標本自己相関関数, 標本経路, 事後確率密度関数を示す. 標本自己相関関数はいずれのパラメータにおいても十分に減衰し, 定常分布への収束が速いことが分かる. また, 標本経路も状態空間を万遍なく十分に訪れていることも分かる. 表 1 に推定された事後平均, 事後標準偏差, 95% 信用区間, 非効率性因子³⁾ (inefficiency

³⁾非効率性因子は, マルコフ連鎖モンテカルロ (Markov Chain Monte Carlo; MCMC) 法の標本の自己相関を考慮した場合の分散と仮に標本が独立と仮定した場合の分散との比であり, 独立標本を用いた場合と同じ精度の推定量を計算するのに何倍の MCMC の標本数が必要であることを表す量である.

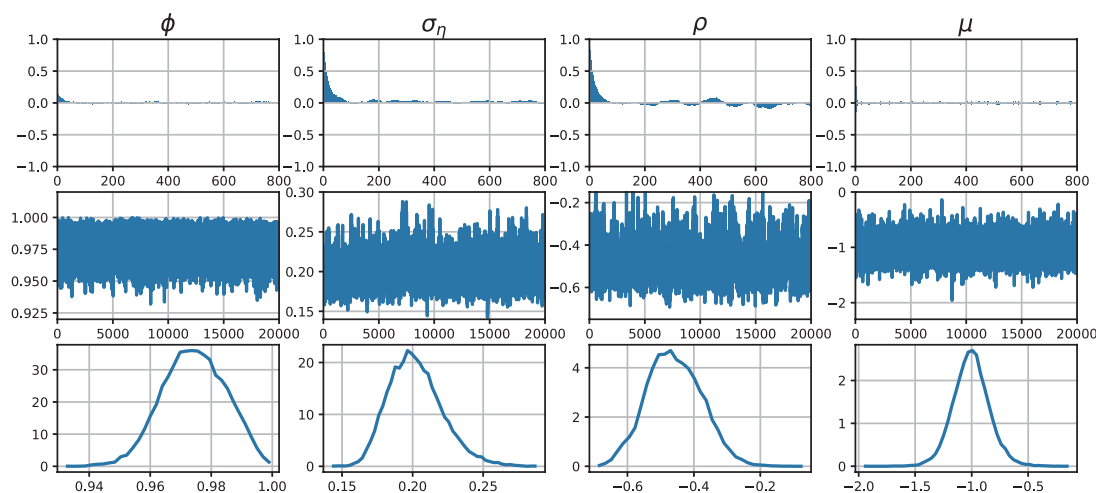


図 1: テストデータを用いた SVL モデルの推定結果

標本自己相関関数 (上段), 標本経路 (中段), 事後確率密度関数 (下段).

factor) を示す. SVL モデルに加え, SV モデルの推定結果も掲載している. パラメータの推定値をみると, ϕ , σ_η , μ の事後平均はどちらのモデルもそれぞれ 0.97 以上, 0.20 程度, -1.0 程度であり, テストデータを発生させた際のパラメータの値とよく一致していることが分かる. また, ρ の事後平均は -0.4 程度であり, こちらもテストデータのパラメータの値と一致していると言える. 表 1 から非効率性因子の値 m はあまり大きくなく, 最も大きい σ_η の m であっても 54 程度であり, 大森・渡部 (2008) による先行研究と整合的である.

表 1: テストデータを用いた推定結果

1 行目: 事後平均および事後標準偏差, 2 行目: 95% 信用区間, 3 行目: 非効率性因子.

パラメータ	SV	SVL
ϕ	0.9751 (0.0107)	0.9743 (0.0103)
	[0.9567, 0.9919]	[0.9574, 0.9911]
	4.3	11.5
σ_η	0.2032 (0.0213)	0.2022 (0.0191)
	[0.1571, 0.2259]	[0.1741, 0.2364]
	34.0	54.4
ρ		-0.4183 (0.0824)
		$[-0.5904, -0.3207]$
		19.8
μ	-1.0320 (0.1693)	-1.0048 (0.1602)
	$[-1.3028, -0.7560]$	$[-1.2608, -0.7385]$
	2.4	2.4

5. まとめ

本稿では、HMC 法について解説するとともに、HMC 法によるテストデータを用いた SV モデルのパラメータ推定を行った。標本自己相関関数から、いずれのパラメータについても十分に減衰し定常分布への収束が速く、標本経路も状態空間を万遍なく十分に訪れていることが分かった。また、HMC 法による対称・非対称の両 SV モデルのパラメータ推定の結果は、テストデータのパラメータの値によく一致することが分かった。さらに、非効率性因子の値はあまり大きくなく、最も大きな σ_η であっても 54 程度であった。以上のことから、HMC 法は SV モデルのパラメータの推定に有効であり、また他のサンプリング法と比べても十分な効率性を持つことが分かった。

来月号では日経 225 先物と TOPIX 先物の実際の株式収益率データを用いた HMC 法による推定結果について報告する予定である。

(来月号につづく)

参考文献

- [1] Duane, S., Kennedy, A. D., Pendleton, B. J., and Roweth, D. (1997), “Hybrid Monte Carlo,” *Physics Letters*, B195(2), pp. 216–222.
- [2] Neal, R. M. (2011), “MCMC Using Hamiltonian Dynamics,” *Handbook of Markov Chain Monte Carlo*, 2(11), pp. 139–188.
- [3] Nugroho, D. B., and Morimoto, T. (2015), “Estimation of Realized Stochastic Volatility Models Using Hamiltonian Monte Carlo-Based Methods,” *Computational Statistics*, 30, pp. 491–516.
- [4] Takaishi, T. (2013), “Empirical Analysis of Stochastic Volatility Model by Hybrid Monte Carlo Algorithm,” *Journal of Physics: Conference Series*, 423(1), 012021.
- [5] 大森裕浩・渡部敏明 (2008), 「MCMC 法とその確率的ボラティリティ変動モデルへの応用」, 国友直人・山本拓 (編) 『21 世紀の統計科学 I 社会・経済と統計科学』東京大学出版会, 第 9 章, pp. 223–266.

本資料に関する著作権は、株式会社大阪取引所にあります。

本資料の一部又は全部を無断で転用、複製することはできません。

本資料の内容は、株式会社大阪取引所の意見・見解を示すものではありません。

本資料は、デリバティブ商品の取引の勧誘を目的としたものではありません。