

日経平均 VI 先物のハミルトニアン・モンテカルロ法 によるベイズ時系列分析 (第 2 回)

日本大学経済学部 戸塚英臣
日本大学経済学部 三井秀俊

1. はじめに

前号では, 誤差項の分布に t 分布¹⁾ を仮定した場合の SV (Stochastic Volatility) モデルと SVL (SV with Leverage) モデルについて説明し, HMC (Hamiltonian Monte Carlo) モデルによるベイズ推定に関して解説を行なった. また, 本稿で使用した日経平均 VI 先物のデータを紹介した. 第 2 回では, 日経平均 VI 先物の収益率を用いた HMC 法によるベイズ推定の実証分析と推定結果について述べる.

2. 実証分析

(1) HMC 法によるベイズ推定

HMC 法によるベイズ推定においては, 稼働検査期間 (burn-in period) として最初の 10,000 個を捨てた後, 100,000 個の確率標本を発生させ, マルコフ連鎖モンテカルロ (Markov Chain Monte Carlo; 以下, MCMC) の標本の独立性を保証するため標本の抽出は 5 つおきに合計 20,000 個の結果を用いた. また, 同時に走らせる MCMC の数 (チェーン数) は 3 とした. なお, 本稿における数値計算は全て C 言語を用いている.

本稿では, パラメータ $\theta = (\phi, \sigma_\eta, \rho, \mu)$ に加え, ボラティリティの対数値 $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$ と $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ を潜在変数としてサンプリングしている. HMC 法では複数の確率変数を一度にアップデートしても採択確率が低下しないので, $\theta, \mathbf{h}, \mathbf{z}$ をそれぞれ同時にアップデートしている. 表 1 に HMC 法でサンプリングした $\theta, \mathbf{h}, \mathbf{z}$ の採択確率を示す. θ の採択確率は, SV_n モデル, SV_t モデル, SVL_t モデルが 99.9% と高い値である. また, SVL_t モデルも 99.8% と高い値である. \mathbf{h} と \mathbf{z} の採択確率は, いずれのモデルにおいても 100% となっている.

前号の HMC 法の運動方程式 (15), (16) 式は解析的には解くことができないので, 数値解としてリープフロッグ (leapfrog) 法により求められる. リープフロッグ法には 2 つの任意パラメータ (ϵ, τ) があり, ϵ は仮想的な微小時間を表すステップサイズ, また, τ は時間ステップの回数をそれぞれ表す. HMC 法では (ϵ, τ) を設定する必要があり, 経験上, ϵ は小さく, τ を大きくすると標本経路が状態空間を万遍なく十分に訪れると考えられている. 潜在変数 \mathbf{h}, \mathbf{z} とパラメータ θ をアップデートする際に用いる任意パラメータ (ϵ, τ) には, $(0.05, 1,000)$ と $(0.01, 5,000)$ を用いた.

¹⁾前号の (5) 式での $\sqrt{z_t}u_t$ は, $z_t \sim i.i.d.IG(\nu/2, \nu/2)$ のとき, 自由度 ν の t 分布に従う.

表 1: θ, h, z の採択確率

	θ	h	z
SVn モデル	99.9 %	100.0 %	—
SVLn モデル	99.9 %	100.0 %	—
SVt モデル	99.8 %	100.0 %	100.0 %
SVLt モデル	99.9 %	100.0 %	100.0 %

(2) 収束判定

HMC 法の妥当性を調べるために、サンプリングによって得られた値が、ある事後分布に収束しているかどうかを判断する必要がある。収束を判断するにはいくつかの方法があるが、本稿ではサンプリングしたパラメータの標本自己相関関数、標本経路、事後確率密度関数のプロットによる目視による判定と、Gelman-Rubin 統計量を併用しての判定を行なう。Gelman-Rubin 統計量が 1 に近い場合、連鎖が定常状態に収束していると判断できる²⁾。

3. 推定結果

図 1 に日経平均 VI 先物の日次収益率を用いた SVLn モデルの標本自己相関関数、標本経路、事後確率密度関数を示す。

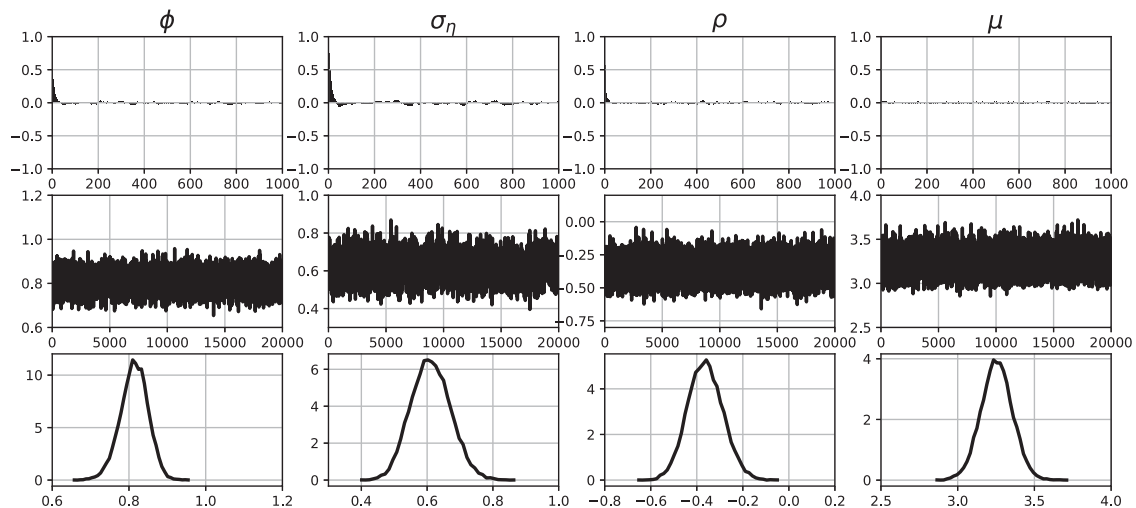


図 1: 日経平均 VI 先物の日次収益率を用いた SVLn モデルの推定結果

標本自己相関関数 (上段), 標本経路 (中段), 事後確率密度関数 (下段)

図 1 の標本自己相関関数より、いずれのパラメータにおいても十分に減衰していること

²⁾詳しくは、Gelman and Rubin (1992), Gelman (1996) を参照。

が分かる. これより HMC 法によりサンプリングされたパラメータの定常分布への収束は十分に速いと言える. また, いずれのパラメータの標本経路も安定した動きで十分に状態空間全体を推移していると思し得ることから, 定常分布に収束していると考えられる. また, 図 2 に SVLt モデルの推定結果を示す. SVLt モデルの場合も, SVLn モデルと同様な結果が得られている.

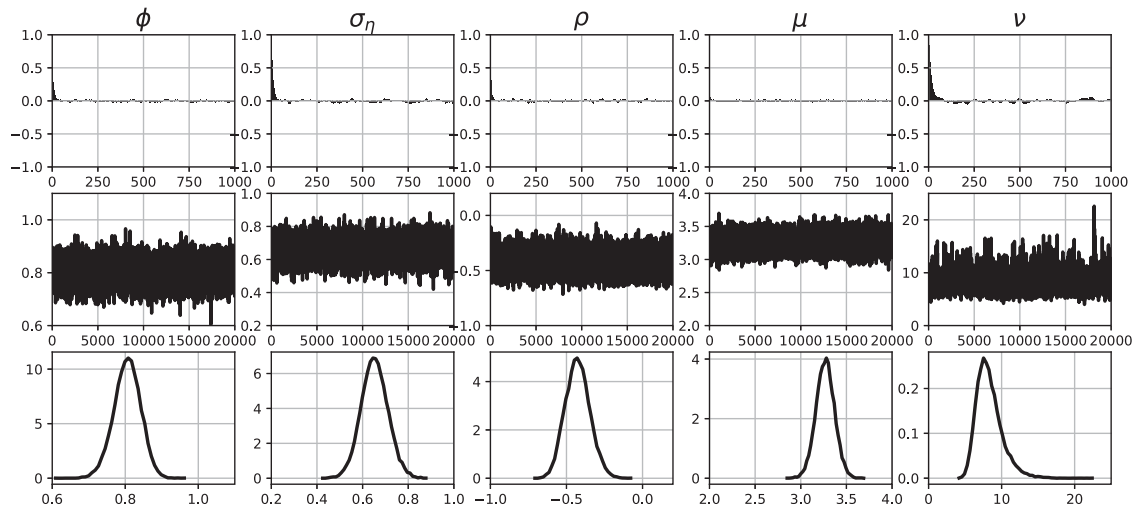


図 2: 日経平均 VI 先物の日次収益率を用いた SVLt モデルの推定結果
標本自己相関関数 (上段), 標本経路 (中段), 事後確率密度関数 (下段)

表 2: Gelman-Rubin 統計量

	ϕ	σ_{η}	ρ	μ	ν
SVn	1.0000	1.0005		1.0001	
SVLn	1.0003	1.0005	1.0001	1.0001	
SVt	1.0007	1.0017		1.0000	1.0011
SVLt	1.0001	1.0002	1.0001	1.0000	1.0002

表 2 に SVn モデル, SVLn モデル, SVt モデル, SVLt モデルの各パラメータの Gelman-Rubin 統計量を示す. 表 2 から, いずれのパラメータの Gelman-Rubin 統計量もほぼ 1 に近い値であることが分かる. したがって, 得られた標本系列は不変分布に十分収束していると言える.

表 3 に日経平均 VI 先物の日次収益率を用いた SVn モデル, SVLn モデル, SVt モデル, SVLt モデルの推定結果を示す. 各パラメータの一行目は事後平均および事後標準偏差, 2 行目は 95% 信用区間, 3 行目は非効率的因子 (inefficiency factor) である. ボラティリティ

表 3: 日経平均 VI 先物の日次収益率を用いた推定結果

1 行目: 事後平均および事後標準偏差, 2 行目: 95% 信用区間, 3 行目: 非効率因子

パラメータ	SV _n	SVLn	SV _t	SVLt
ϕ	0.7952 (0.0438)	0.8141 (0.0360)	0.7970 (0.0436)	0.8048 (0.0370)
	[0.7067, 0.8778]	[0.7400, 0.8818]	[0.7234, 0.8663]	[0.7288, 0.8742]
	7.8	4.6	6.7	4.1
σ_{η}	0.6479 (0.0665)	0.6103 (0.0602)	0.6457 (0.0661)	0.6532 (0.0592)
	[0.5223, 0.7829]	[0.4958, 0.7319]	[0.5388, 0.7581]	[0.5403, 0.7740]
	12.7	7.4	8.3	8.3
ρ		-0.3633 (0.0771)		-0.4252 (0.0800)
		[-0.5093, -0.2073]		[-0.5755, -0.2632]
		5.5		8.5
μ	3.2028 (0.1071)	3.2545 (0.1033)	3.2014 (0.1074)	3.2680 (0.1030)
	[2.9914, 3.4141]	[3.0514, 3.4573]	[3.0262, 3.3789]	[3.0671, 3.4731]
	4.4	3.3	2.2	3.0
ν			6.4789 (1.2309)	8.2908 (1.7249)
			[4.7901, 8.7266]	[5.6508, 12.4243]
			21.9	26.8
対数周辺尤度	4880.91	4726.31	6134.21	5817.50

に対するショックの持続性を表すパラメータ ϕ についてみると、 ϕ の事後平均はどのモデルでも 0.8 前後の値であり、ボラティリティの高い持続性が現れている。SVLn モデルと SVLt モデルによる日経平均 VI 先物の日次収益率とボラティリティとの間の相関を表すパラメータである ρ について検証すると、 ρ の事後分布は各々、 -0.3633 、 -0.4252 であり、さらに、95% 信用区間が各々、 $[-0.5093, -0.2073]$ 、 $[-0.5755, -0.2632]$ であることから ρ が負である事後確率は 95 % より大きいと言える。したがって、 ρ が負の値であることから、日経平均 VI 先物の日次収益率とボラティリティの対数値との間には負の相関があると考えられ、レバレッジ効果の存在が示された。 ν の事後平均については、SVt モデルでは 6.4789 であり、SVLt モデルでは 8.2908 であった。そのため正規分布よりも裾が厚い分布を捉えており、日経平均 VI 先物の日次収益率の分布は裾が厚いことを示している。また、いずれのモデルにおいても非効率性因子の値はあまり大きくない結果となっており、HMC 法が他の MCMC 法と比較しても有効であることを示唆している。対数周辺尤度³⁾ をみると、誤差分布が正規分布よりも t 分布の方が対数周辺尤度の値が高く、レバレッジ効果が無いモデルの方が対数周辺尤度の値が高くなる傾向がある。また、SVt モデルの対数周辺尤度が 4 つのモデルの中で最も大きいことが分かる。したがって、日経平均 VI 先物の日

³⁾詳しくは、Newton and Raftery (1994) を参照。

次収益率に対しては、SV_t モデルが最もあてはまりが良いモデルであると考えられる。

4. まとめ

本稿では、HMC 法を用いて SV モデルにより日経平均 VI 先物の日次収益率データを使用して実証研究を行なった。日経平均 VI 先物は、原資産が伝統的資産ではなくボラティリティを原資産とするが、SV モデルにより分析できることが確認された。また、レバレッジ効果の存在や誤差分布が正規分布よりも t 分布の方がモデルの当てはまりが優れていることが明らかとなった。さらに、SV モデルに対して HMC 法によるベイズ推定は有効であることが検証された。今後の課題としては、HMC 法と Gibbs Sampler や Metropolis-Hastings 等の他の MCMC 法と効率性の比較を行なうことやリープフロッグ法による SV モデルのベイズ推定への影響を検証すること⁴⁾ が考えられる。

参考文献

- [1] 戸塚英臣・三井秀俊 (2020), 「ハミルトニアン・モンテカルロ法におけるリープフロッグ法による SV モデルのベイズ推定への影響」, 日本大学経済学部経済科学研究所 Working Paper Series 20-03. <https://www.eco.nihon-u.ac.jp/center/economic/publication/pdf/20_03.pdf>
- [2] Gelman, A. (1996), “Inference and Monitoring Convergence,” in Gilks, W. R., Richardson, S. and Spiegelhalter, D. J. eds., *Markov Chain Monte Carlo in Practice*, pp. 131–143, Chapman & Hall.
- [3] Gelman, A. and Rubin, D. B. (1992), “Inference from Iterative Simulation Using Multiple Sequences (with discussion),” *Statistical Science*, Vol.7, No.4, pp. 457–511.
- [4] Hoffmani, M. D. and Gelman, A. (2014), “The No-U-Turn Sampler: Adaptively Setting Path Lengths in Hamiltonian Monte Carlo,” *Journal of Machine Learning Research*, 15, pp. 1593–1623.
- [5] Newton, M. A. and Raftery, A. E. (1994), “Approximate Bayesian Inference by the Weighted Likelihood Bootstrap,” *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* 56, pp. 3–26.

本資料に関する著作権は、株式会社大阪取引所にあります。

本資料の一部又は全部を無断で転用、複製することはできません。

本資料の内容は、株式会社大阪取引所の意見・見解を示すものではありません。

本資料は、デリバティブ商品の取引の勧誘を目的としたものではありません。

⁴⁾詳しくは、戸塚・三井 (2020) を参照。また、 ϵ とステップの回数 τ を設定する必要のない No-U-Turn Sampler (NUTS) 法も考案されている。詳しくは、Hoffmani and Gelman (2014) を参照。