

# 日経平均先物と TOPIX 先物のハミルトニアン・モンテカルロ法による安定分布のベイズ推定 (第 2 回)

日本大学経済学部 戸塚英臣

日本大学経済学部 三井秀俊

## 1. はじめに

前号では、安定分布<sup>1)</sup> とその数値積分について解説し、HMC モデルによるベイズ推定に関して説明を行なった。第 2 回では、日経平均先物と TOPIX 先物の収益率データを用いた HMC 法によるベイズ推定の実証分析と推定結果について述べる。最後に、まとめと今後の課題について言及する。

## 2. 実証分析

### 2.1 データ

本稿では、JPX データクラウド (JPX Data Cloud)<sup>2)</sup> から取得した日経平均先物と TOPIX 先物の期近物の終値を用いた。また、日中に取引される株価指数先物を研究対象とし、ナイト・セッションに関しては研究対象としない<sup>3)</sup>。日経平均先物と TOPIX 先物のデータの期間は、2015 年 1 月 5 日から 2019 年 12 月 30 日までである。 $S_t$  を  $t$  時点の日経平均株価とすると、 $t$  時点の日経平均株価の日次収益率  $y_t^{Nikkei}$  は、 $y_t^{Nikkei} = (\ln S_t - \ln S_{t-1}) \times 100$ 、 $I_t$  を  $t$  時点の TOPIX の水準とすると、 $t$  時点の TOPIX の日次収益率  $y_t^{TOPIX}$  は、 $y_t^{TOPIX} = (\ln I_t - \ln I_{t-1}) \times 100$  として計算を行なった。

各々の株価指数先物の日次収益率のサンプル期間は、2015 年 1 月 6 日から 2019 年 12 月 30 日までであり、観測個数は 1,221 である。表 1 に各々の株価指数先物の日次収益率の要約統計量を示す。また、図 1 に、日経平均先物と TOPIX 先物の日次収益率のヒストグラムを示す。

### 2.2 実証分析に用いた計算機と計算時間について

本稿の計算は、東京大学情報基盤センターの大規模超並列スーパーコンピュータシステム Oakbridge-CX を用いて行なった。当システムの特徴は、米国 Intel 社による Xeon プロセッサと Omnipath アーキテクチャを搭載した計算ノード 1,368 台により構成される

<sup>1)</sup>安定分布に関して詳しくは、Nolan (2020) を参照。また、ファイナンスへの応用に関して詳しくは、Rachev and Mittnik (2000) を参照。

<sup>2)</sup>詳しくは、<http://db-ec.jpx.co.jp/> を参照。

<sup>3)</sup>本稿では、CME (Chicago Mercantile Exchange) や SGX-DT (Singapore Exchange Derivatives Trading Limited) で取引されている日経平均先物も対象外とする。

表 1: 日経平均先物と TOPIX 先物の日次収益率の要約統計量

2015 年 1 月 6 日 – 2019 年 12 月 30 日

	観測個数	平均	標準偏差	歪度	超過尖度	最大値	最小値
日経平均先物	1,221	0.0252	1.2819	-0.3908	5.0033	7.4204	-7.8446
TOPIX 先物	1,221	0.0168	1.2319	-0.3878	6.0484	8.2504	-7.2176

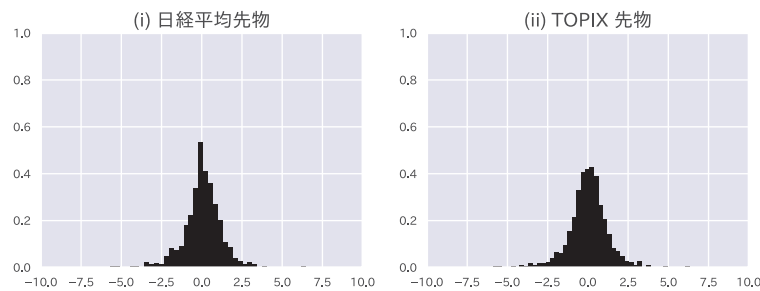


図 1: 日経平均先物と TOPIX 先物の日次収益率のヒストグラム

大規模超並列クラスター型スーパーコンピュータであり、総理論演算性能は 6.61 PFLOPS<sup>4)</sup> である。ノードは、米国 Intel 社製の Xeon Platinum 8280 を 2 つ搭載し、それぞれの CPU は 28 個のコアからなる。ノードの単体性能は、4.8384 TFLOPS である。

本稿で用いたプログラムは、データごとに安定分布のフーリエ積分を行なう必要があるため、積分を計算する箇所を OpenMP によりノード内並列化した。本稿での計算条件は、次の通りである。HMC 法によるベイズ推定においては、稼働検査期間 (burn-in period) として最初の 1,000 個を捨てた後、10,000 個の確率標本を発生させ、MCMC の標本の独立性を保證するため標本の抽出する間隔を 2 とし、5,000 個を用いた。また、同時に走らせる MCMC の数 (チェーン数) は 3 とした。上記のスーパーコンピュータの 1 ノードを用いて行なった 1 つの MCMC の計算にかかった処理時間はおよそ 28.7 時間であり、全計算時間は約 89.0 時間である。

### 3. 推定結果

図 2 と 図 3 に、日経平均先物と TOPIX 先物の日次収益率による標本自己相関関数、標本経路、事後確率密度関数を示す。図 2 と 図 3 から、標本自己相関関数はいずれのパラメータについても十分に減衰しており定常分布への収束が速いことが分かる。また、標本経路も状態空間を万遍なく十分に訪れていること、さらに、事後確率密度関数は単峰型の分布となっていることが分かる。

表 2 に日経平均先物と TOPIX 先物の日次収益率による安定分布の確率密度関数の 4

<sup>4)</sup>FLOPS とは、コンピュータが 1 秒間に処理可能な浮動小数点演算の回数を表す単位である。PFLOPS は、 $10^{15} \times \text{FLOPS}$  のことである。

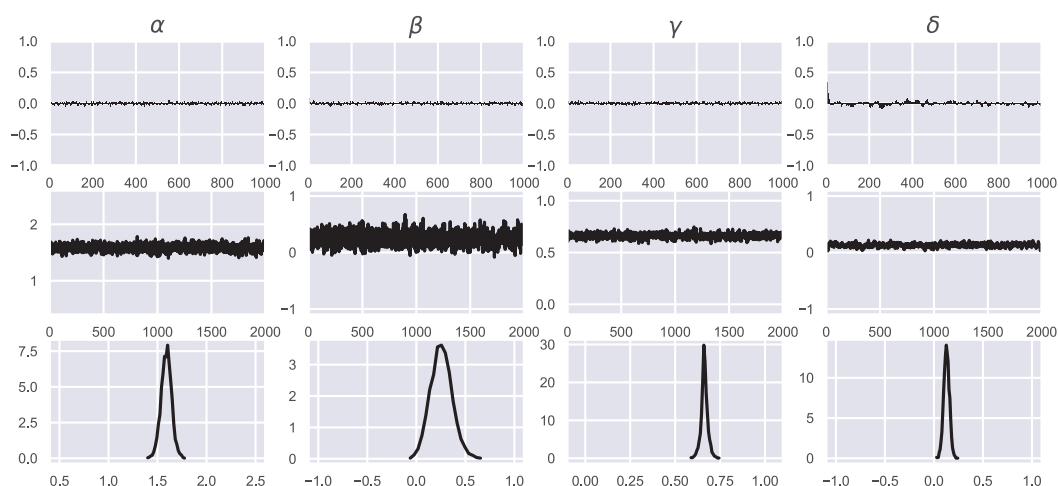


図 2: 日経平均先物の日次収益率を用いた推定結果, 標本自己相関関数 (上段), 標本経路 (中段), 事後確率密度関数 (下段).

つのパラメータの Gelman-Rubin (G-R) 統計量<sup>5)</sup>を示す. 表 2 から, 日経平均先物と TOPIX 先物の日次収益率による安定分布の確率密度関数の 4 つのパラメータにおいて, G-R 統計量が, 1.05 以下であることが分かる. 図 2 と 図 3 の結果と表 2 の G-R 統計量から, 日経平均先物と TOPIX 先物を用いて得られた標本系列は不変分布に十分収束していると言える.

表 2: 安定分布の確率密度関数のパラメータの Gellman-Rubin 統計量

	$\alpha$ (特性)	$\beta$ (歪度)	$\gamma$ (尺度)	$\delta$ (位置)
日経平均先物	1.0001	1.0000	1.0000	1.0007
TOPIX 先物	1.0000	1.0000	1.0002	1.0031

表 3 に, 日経平均先物と TOPIX 先物の日次収益率を用いた安定分布の確率密度関数の推定結果を示す. 表 3 から, 次の 3 つの特徴をみることができる. 日経平均先物と TOPIX 先物の特性指数の値は, 1.5908 と 1.6023 であり, また, 95% 信頼区間も [1.4848, 1.6937] と [1.4954, 1.7045] である. これより, 日経平均先物と TOPIX 先物のどちらの日次収益率の分布も, 正規分布よりも裾の厚い分布であることが分かる. また, 日経平均先物の歪度指数は, 事後平均が 0.2550, 95% 信用区間は 0 を含んでいないことから, 日経平均先物の日次収益率の分布は, プラス方向に歪んでいると言える. 一方, TOPIX 先物の歪度指数は, 事後平均が 0.1309 ではあるが, 95% 信用区間は 0 を含んでいることから, TOPIX 先物の日次収益率の分布は歪んでいないと考えられる. さらに, 日経平均先物と TOPIX 先物の尺度指数は, 事後平均と 95% 信頼区間ともに大きな違いがないと言える.

<sup>5)</sup>詳しくは, Gelman and Rubin (1992), Gelman (1996) を参照.

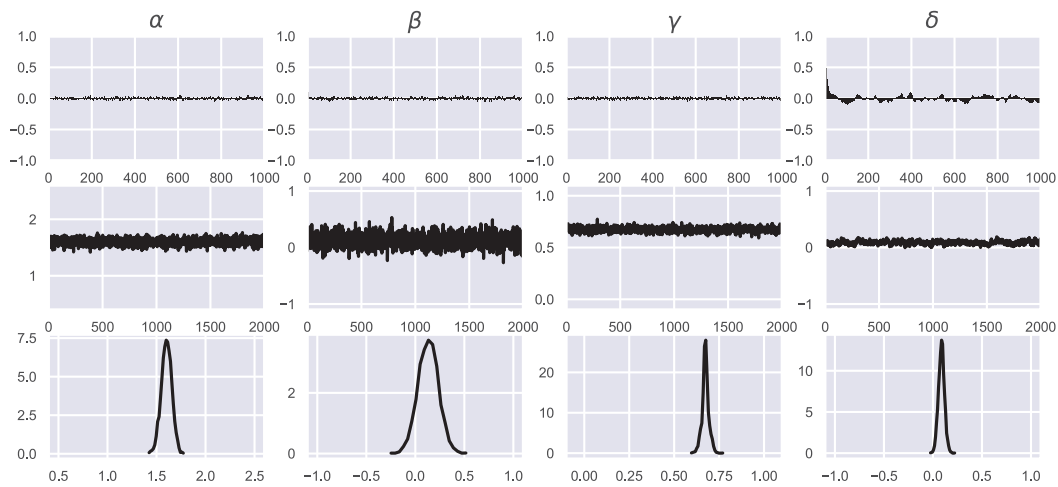


図 3: TOPIX 先物の日次収益率を用いた推定結果, 標本自己相関関数 (上段), 標本経路 (中段), 事後確率密度分布 (下段).

表 3: 日経平均先物と TOPIX 先物を用いた推定結果

1 行目: 事後平均および標準偏差, 2 行目: 95 % 信用区間, 3 行目: 非効率性因子

	$\alpha$ (特性)	$\beta$ (歪度)	$\gamma$ (尺度)	$\delta$ (位置)
日経平均先物	1.5908 (0.0529) [1.4848, 1.6937]	0.2550 (0.1078) [0.0525, 0.4764]	0.6627 (0.0184) [0.6238, 0.7022]	0.1293 (0.0287) [0.0723, 0.1848]
	3.26	3.31	2.87	8.13
TOPIX 先物	1.6023 (0.0537) [1.4954, 1.7045]	0.1309 (0.1057) [-0.0734, 0.3420]	0.6736 (0.0194) [0.6326, 0.7149]	0.0865 (0.0316) [0.0238, 0.1498]
	3.47	4.54	2.43	9.54

#### 4. まとめと今後の課題

本稿では, HMC 法を用いて, 日経平均先物と TOPIX 先物の日次収益率による安定分布の確率密度関数のベイズ推定を行なった. 今後の課題としては, 本稿で用いた手法を高頻度データへ拡張することが考えられる. 本稿では日次データを用いた解析を行なったが, 高頻度データを用いることで, 異なる研究結果が得られる可能性がある. しかし, DE 公式を用いても計算時間がかかるため, 計算プログラムの高速化が課題である. また, HMC 法を用いて, 安定分布以外の非対称正規分布 (skewed normal distribution), 非対称  $t$  分布 (skewed  $t$  distribution) 等の確率密度関数のベイズ推定を行ない, 株価指数先物の日次収益率分布に最も適した分布関数を同定することも重要な課題である.

## 参考文献

- [1] Gelman, A. (1996), “Inference and Monitoring Convergence,” in Gilks, W. R., Richardson, S. and Spiegelhalter, D. J. eds., *Markov Chain Monte Carlo in Practice*, pp. 131–143, Chapman & Hall.
- [2] Gelman, A. and Rubin, D. B. (1992), “Inference from Iterative Simulation Using Multiple Sequences (with discussion),” *Statistical Science*, Vol.7, No.4, pp. 457–511.
- [3] Nolan, J. P. (2020), *Univariate Stable Distributions: Models for Heavy Tailed Data*, Springer.
- [4] Rachev, S. T. and Mittnik, S. (2000), *Stable Paretian Models in Finance*, Wiley.

本資料に関する著作権は、株式会社大阪取引所にあります。

本資料の一部又は全部を無断で転用、複製することはできません。

本資料の内容は、株式会社大阪取引所の意見・見解を示すものではありません。

本資料は、デリバティブ商品の取引の勧誘を目的としたものではありません。