

マルコフ・スイッチング VAR モデルによる日経平均 VI と 日経平均株価の連動性の分析

東洋大学経営学部 里吉清隆

1 はじめに

日経平均ボラティリティー・インデックス（以下、日経平均 VI）は、日経平均株価の将来 1 か月の変動を推定した数値であり、日経平均株価が急落したときに急上昇するという特徴がある。近年では、新型コロナウイルスの感染者数が日本で増加し始めた 2020 年 3 月頃に、日経平均株価の暴落と同時に日経平均 VI が急上昇したことが記憶に新しい。また、そのような株式市場の暴落時以外でも、日経平均 VI と日経平均株価の値動きには弱い負の相関があることが知られている。

本研究ではそのような日経平均 VI と日経平均株価の負の相関が時間を通じてどのように変化しているのか、株式市場の時系列的変動にブル局面とベア局面などで違いが見られるのか等について、マルコフ・スイッチング VAR モデル (Markov-switching Vector Autoregressive Model; 以下、MS-VAR モデル) を用いて分析を行った¹⁾。

2 モデル

n 変量からなる t 時点のベクトルを $\mathbf{y}_t = (y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{nt})'$ とする。モデルのパラメータが観測されない状態変数に依存してスイッチングを起こす MS-VAR モデルは次のように表される。

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{c}(s_t) + \Phi_1(s_t)\mathbf{y}_{t-1} + \Phi_2(s_t)\mathbf{y}_{t-2} + \dots + \Phi_p(s_t)\mathbf{y}_{t-p} + \boldsymbol{\epsilon}_t, \quad \boldsymbol{\epsilon}_t | s_t \sim N(\mathbf{0}, \Sigma(s_t)) \quad (1)$$

s_t は 1 から M までの整数値をとる状態変数であり、 $\mathbf{c}(s_t)$, $\Phi_1(s_t), \dots, \Phi_p(s_t)$, $\Sigma(s_t)$ は、 s_t の値に依存する。例えば、 $\mathbf{c}(s_t)$ は次のようになる。

$$\mathbf{c}(s_t) = \begin{cases} \mathbf{c}_1 = (c_{11}, \dots, c_{n1})', & s_t = 1 \text{ のとき} \\ \mathbf{c}_2 = (c_{12}, \dots, c_{n2})', & s_t = 2 \text{ のとき} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_M = (c_{1M}, \dots, c_{nM})', & s_t = M \text{ のとき} \end{cases} \quad (2)$$

本研究では、状態変数 s_t は 1 階のマルコフ過程に従うと仮定する。

$$p_{ij} = \Pr[s_t = j | s_{t-1} = i], \quad \sum_{j=1}^M p_{ij} = 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, M \quad (3)$$

¹⁾ 柴田 (2018) は日経平均 VI と日経平均株価の連動性について、日中の分刻みのデータを用いて分析を行っている。

p_{ij} は状態 i から状態 j への推移確率である。このとき、推移確率行列は

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{M1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{M2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1M} & p_{2M} & \cdots & p_{MM} \end{pmatrix} \quad (4)$$

となる。

本研究では、日経平均 VI と日経平均株価のそれぞれについて、前日の値が当日の値に影響を与えているかを調べるため、ラグの次数を 1 ($p = 1$) としている。状態の数については、コロナ禍という特殊な状況を考慮して 4 ($M = 4$) とした²⁾。モデルのパラメータは最尤法で推定した³⁾。

3 分析結果

本研究では日経平均株価と日経平均 VI の日次データを使用した。日経平均株価は終値から計算した対数収益率 (%), 日経平均 VI は終値の階差を分析に用いた⁴⁾。データの期間は、2018 年 1 月 5 日から 2022 年 9 月 9 日までである。

モデルの推定結果は表 1 に示した。パネル (a) の日経平均株価の定数項の値を見てみると、状態 1 は有意ではないが負の値となっている。後ほど詳しく説明するが、図 1 のパネル (a) のグラフを確認すると、状態 1 は日経平均株価が急激に下落している時期に相当していることがわかる。また、他の状態の定数項の値はすべて有意であり、状態 2 (ベア局面) は -0.352 で負に有意、状態 3 もゼロに近い値ではあるが -0.081 で負に有意、状態 4 は 0.971 で正に有意となっている。これらの結果から、以下では状態 1 を暴落局面、状態 2 をベア局面、状態 3 を調整局面、状態 4 をブル局面と呼ぶことにする。一方の日経平均 VI の定数項については、状態 2 (ベア局面) で正に有意、状態 4 (ブル局面) で負に有意の値を示している。日経平均株価の定数項は状態 2 (ベア局面) で負に有意、状態 4 (ブル局面) で正に有意であることを併せて考えると、これらの 2 つの状態においては定数項の符号は逆であり、日経平均と日経平均 VI は逆方向のトレンドを持っているといえる。このような傾向は、定数項の値は有意ではないが、状態 1 (暴落局面) でも同様である。

前日の日経平均株価の係数は、状態 2 (ベア局面) において日経平均株価で -0.253 、日経平均 VI で 0.368 という値であり、どちらも有意である。このことから、状態 2 (ベア局面) においては、日経平均株価は前日の日経平均株価と逆方向の変動、日経平均 VI は前日の日経平均株価と同方向の変動をしていることがわかる。他の状態については、状態 4 (ブル局面) の日経平均 VI の係数が 0.523 と正に有意であり、状態 2 (ベア局面) のときと同様に、前日の日経平均株価と同方向の変動を起こしている。前日の日経平均 VI の係数については、どの状態においても有意な値は見られなかった。

表 1 のボラティリティは、(1) 式の $\Sigma(s_t)$ の対角要素の推定値である。日経平均のボラティリティは状態 1 (暴落局面) の値が 6.851 と最も高く、2 番目に大きい状態 2 (ベア局面) の値の約 4 倍となっている。日経平均 VI のボラティリティも同様に、状態 1 (暴落局面) が最も高く、その次が状態 2 (ベア局面) となっている。状態 3 (調整局面) と状態 4 (ブル局面) については、日経平均、日経平均 VI ともにボラティリティは非

²⁾ マルコフ・スイッチング・モデルの状態の数は情報量基準などを利用して決めることが望ましいが、本研究では試験的に 4 状態として分析を行った。Guidolin & Timmermann (2007) は 4 状態を仮定した MS-VAR モデルを提案し、米国の証券市場の月次データを用いて資産配分に関する分析を行っている。

³⁾ 本研究の最尤推定のための数値最適化には、統計解析ソフト R の optim 関数を利用した。最適化アルゴリズムは準ニュートン法 (BFGS 法) である。

⁴⁾ Fleming *et al.* (1995) は本研究と同様に、VIX の日次と週次のデータについて階差を用いて分析を行っている。

表1 MS-VAR モデルの推定結果

(a) 係数		日経平均株価	日経平均 VI
定数項	状態 1 (暴落局面)	-0.262 (0.316)	0.443 (0.523)
	状態 2 (ベア局面)	-0.352 (0.081)	0.232 (0.112)
	状態 3 (調整局面)	-0.081 (0.046)	-0.027 (0.051)
	状態 4 (ブル局面)	0.971 (0.171)	-0.519 (0.089)
前日の日経平均株価	状態 1 (暴落局面)	0.073 (0.156)	0.095 (0.252)
	状態 2 (ベア局面)	-0.253 (0.107)	0.368 (0.153)
	状態 3 (調整局面)	-0.023 (0.049)	-0.002 (0.064)
	状態 4 (ブル局面)	-0.116 (0.130)	0.523 (0.085)
前日の日経平均 VI	状態 1 (暴落局面)	-0.070 (0.094)	0.025 (0.156)
	状態 2 (ベア局面)	-0.056 (0.071)	0.061 (0.103)
	状態 3 (調整局面)	-0.027 (0.069)	-0.042 (0.083)
	状態 4 (ブル局面)	0.042 (0.101)	0.142 (0.087)
ボラティリティ	状態 1 (暴落局面)	6.851 (1.161)	18.991 (3.371)
	状態 2 (ベア局面)	1.620 (0.177)	3.586 (0.409)
	状態 3 (調整局面)	0.269 (0.037)	0.374 (0.057)
	状態 4 (ブル局面)	0.676 (0.124)	0.376 (0.063)
相関係数	状態 1 (暴落局面)	-0.668	
	状態 2 (ベア局面)	-0.864	
	状態 3 (調整局面)	-0.651	
	状態 4 (ブル局面)	-0.279	

(b) 推移確率行列

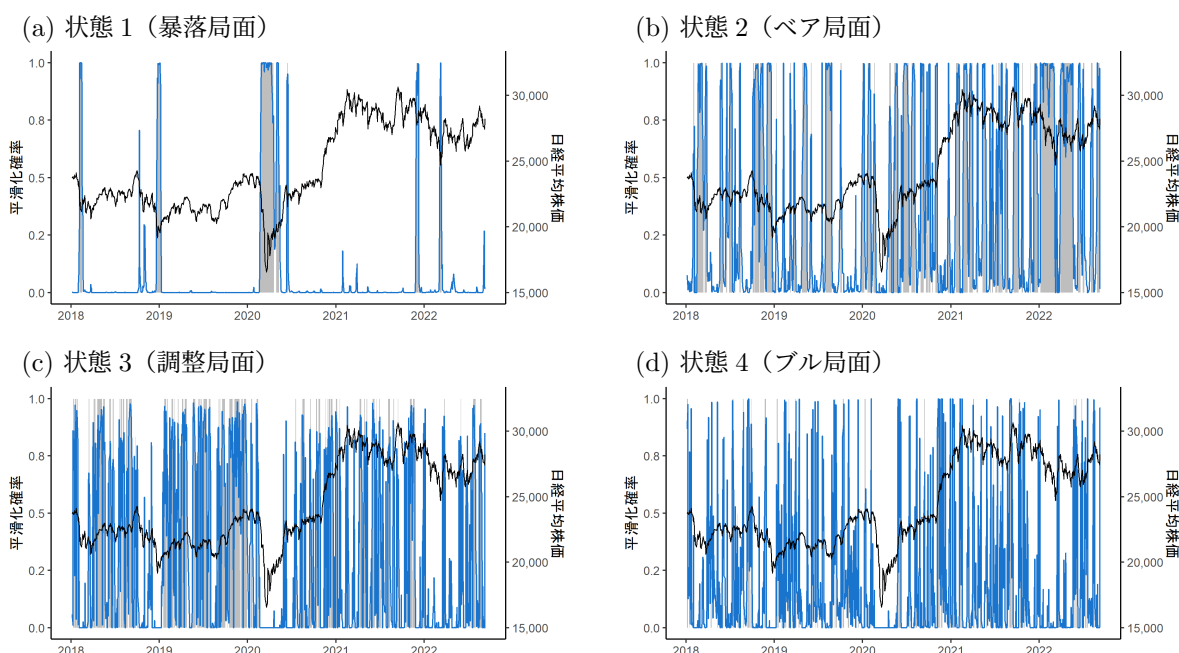
	状態 1 (暴落局面)	状態 2 (ベア局面)	状態 3 (調整局面)	状態 4 (ブル局面)
状態 1 (暴落局面)	0.873 (0.015)	0.023 (0.012)	0.000 (0.010)	0.000 (0.032)
状態 2 (ベア局面)	0.127 (0.006)	0.850 (0.023)	0.142 (0.026)	0.000 (0.007)
状態 3 (調整局面)	0.000 (0.000)	0.000 (0.001)	0.687 (0.053)	0.546 (0.105)
状態 4 (ブル局面)	0.000	0.127	0.171	0.454

注: 括弧内の数値は標準誤差を表す。

常に低い。この結果から、日経平均株価のボラティリティが高い時期には、日経平均 VI の値も大きく変動を起こす傾向があると考えられる。相関係数の値は $\Sigma(s_t)$ の推定値から計算して求めた。どの状態においても負の値であり、一般的に言われているような負の相関が示された。しかしながら、その値は状態によって大きく異なっており、状態 2 (ベア局面) が -0.864 と最も -1 に近く、状態 1 (暴落局面) と状態 3 (調整局面) は同程度、状態 4 (ブル局面) は無相関に近い値になっている。

(4) 式の推移確率行列 \mathbf{P} の推定結果はパネル (b) に示した。対角要素の値を確認すると、状態 1 (暴落局面) と状態 2 (ベア局面) は他の状態よりも持続性が高い。各状態の平均持続期間は状態 1 (暴落局面) で 7.9 日間、状態 2 (ベア局面) で 6.7 日間、状態 3 (調整局面) で 3.2 日間、状態 4 (ブル局面) で 1.8 日間となるこ

図1 平滑化確率と日経平均株価



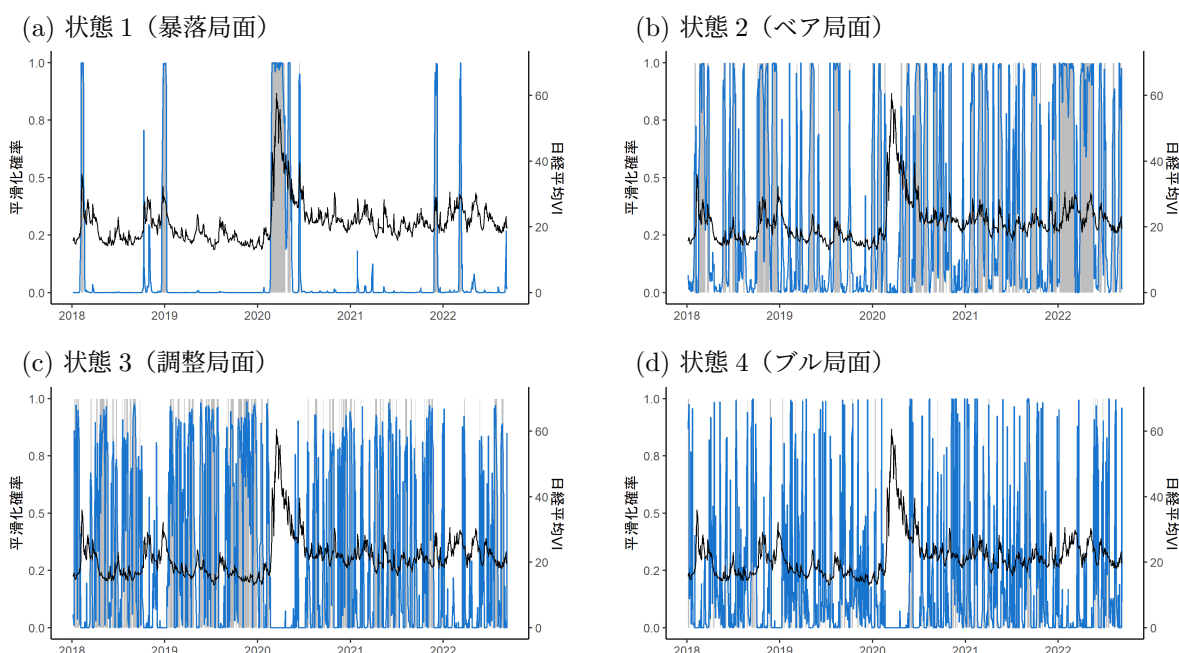
注：青線は平滑化確率（左軸），黒線は日経平均株価（右軸），グレーの網掛けは4つの状態の中で平滑化確率が最も高い状態を表している。

とから、状態1（暴落局面）と状態2（ベア局面）は1週間以上、状態3（調整局面）と状態4（ブル局面）は1週間以内の平均持続期間を持つことがわかる。また、 p_{13} や p_{14} など、他の状態に移る12個の推移確率のうち、半分の6つの値についてはゼロとなっている。このことから、各状態からは他のすべての状態に推移する可能性があるわけではなく、4つの状態の推移の経路は限定されていると考えられる。

図1は、MS-VARモデルの平滑化確率（青線）と日経平均株価（黒線）の推移を表したグラフである。グレーの網掛けは、4つの状態の中で平滑化確率が最も高い時期を示している。パネル(a)の状態1（暴落局面）のグラフを見てみると、本研究のモデルは、2020年の新型コロナウイルス第1波の時期やトランプ米大統領の政権運営に不透明感が強まった2018年12月、ウクライナ情勢が緊迫化した2022年3月など、株式市場の暴落時を状態1（暴落局面）として識別していることがわかる。パネル(b)は状態2（ベア局面）のグラフであり、状態1（暴落局面）と比較すると状態2（ベア局面）が選択される時期は多い。また、状態3（調整局面）と状態4（ブル局面）に留まる期間は非常に短く、このことは表1の推移確率 p_{33} 、 p_{44} の推定値と整合的である（パネル(c)と(d)）。図2には日経平均VIと平滑化確率を示した。新型コロナウイルス第1波のときのように日経平均VIが急激に高くなった時期は、状態1（暴落局面）として捉えられていることがわかる。

図3は、日経平均株価の変化率（%）と日経平均VIの前日との階差をプロットしたものである。パネル(a)は全サンプル期間の散布図であり、通常言われているように、概ね負の相関が見て取れる。パネル(b)から(e)までは、各状態の散布図である。状態1（暴落局面）を見てみると、日経平均株価と日経平均VIのどちらについても、大きく変動した値はすべて、状態1（暴落局面）に含まれていることがわかる。そして、全期間と同様に負の相関関係ではあるが、平均付近のプロットは少なくなっている。それとは対照的に状態2（ベア局面）では、日経平均株価と日経平均VIの変動の範囲は小さく、負の相関が非常に強くなっている。また、状態3（調整局面）と状態4（ブル局面）では散らばり具合は更に小さく、状態4（ブル局面）では無相関に

図2 平滑化確率と日経平均VI



注：青線は平滑化確率（左軸），黒線は日経平均VI（右軸），グレーの網掛けは4つの状態の中で平滑化確率が最も高い状態を表している。

なっている可能性がある。これらの散布図と表1の相関係数の値から、日経平均株価と日経平均VIの負の相関の強弱は時間を通じて一定ではなく、状態2（ベア局面）において最も負の相関が強いと考えられる。

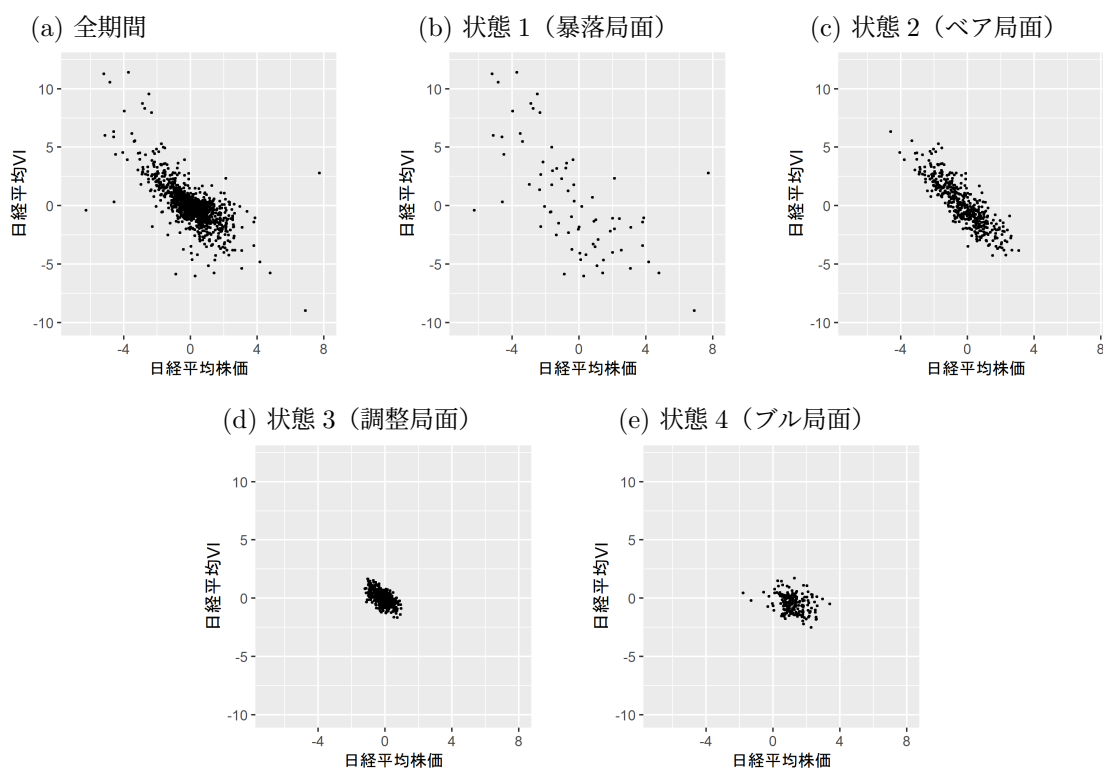
図4は、各状態における日経平均VIの箱ひげ図である。状態1（暴落局面）での日経平均VIは、他の状態よりも明らかに高い位置に分布している。また、日経平均VIは急上昇した後一定のレンジ（20～30程度）に回帰する傾向があることが知られているが、そのようなレベルのボラティリティの値になるのは、基本的に状態1（暴落局面）以外の時期であることがわかる。したがって、この箱ひげ図と図2のグラフから、MS-VARモデルは、日経平均VIが高くなっている時期を1つの状態として捉えることができると考えられる。

4 おわりに

本研究の分析結果は次のとおりである。

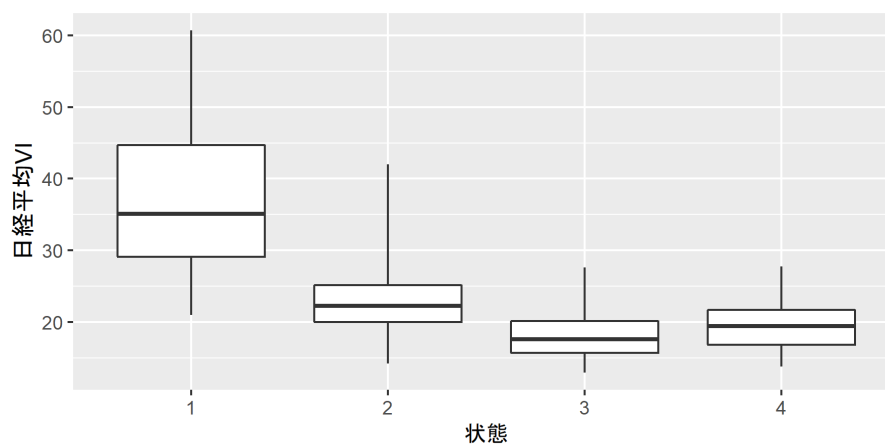
1. 本研究で提案したMS-VARモデルは、日本の株式市場の時系列的変動を暴落局面、ベア局面、調整局面、ブル局面の4つの状態に識別することができ、特に、2020年の新型コロナウイルス第1波の時期などの株式市場の暴落局面を適切に捉えることができる。
2. 各状態の平均持続期間はそれぞれ、暴落局面は7.9日間、ベア局面は6.7日間、調整局面は3.2日間、ブル局面は1.8日間となった。
3. 調整局面以外の状態では、日経平均と日経平均VIは逆方向のトレンドを持っている。
4. 日経平均株価のボラティリティが高い時期には、日経平均VIの値も大きく変動を起こす傾向がある。
5. 日経平均株価と日経平均VIの負の相関の強弱は時間を通じて一定ではなく、ベア局面において最も負の相関が強い。

図3 日経平均株価と日経平均VI



注：日経平均株価は変化率(%)，日経平均VIは前日との階差である。

図4 各状態の日経平均VIの分布



6. ベア局面においては、日経平均株価は前日の日経平均と逆方向の変動、日経平均VIは前日の日経平均と同方向の変動をしている。また、ブル局面の日経平均VIについても、前日の日経平均と同方向の変動を起こしている。

今回は4つの状態を持つモデルで分析を行ったが、調整局面とブル局面を1つにまとめた3状態のモデルにしたほうが実際の株式市場のデータに対する当てはまりは良いかもしれない。また、長期の月次データや週

次データでは、今回とは異なる分析結果になる可能性がある。これらについては今後の課題としたい。

参考文献

- [1] 柴田舞. (2018). 日経平均株価と日経ボラティリティ・インデックス間における負の関係の日中データ分析. 紀要= Bulletin of Research Institute of Economic Science, College of Economics, Nihon University, (48), 75-90.
- [2] Fleming, J., Ostdiek, B., & Whaley, R. E. (1995), "Predicting stock market volatility: A new measure," *Journal of Futures Markets*, 15(3), 265-302.
- [3] Guidolin, M. & Timmermann, A. (2007), "Asset allocation under multivariate regime switching," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 31(11), 3503-3544.

本資料に関する著作権は、株式会社大阪取引所にあります。

本資料の一部又は全部を無断で転用、複製することはできません。

本資料の内容は、株式会社大阪取引所の意見・見解を示すものではありません。

本資料は、デリバティブ商品の取引の勧誘を目的としたものではありません。

筆者および株式会社大阪取引所は、本資料に基づく投資あるいは類似の行為により発生した如何なる損失や損害に対して、一切の責任を負うものではありません。