

実現測度データによるボラティリティ変動モデルの推定

甲南大学 経済学部 石田 功

1. はじめに

今年は、夏場以降、日本の株式市場をはじめ、多く金融市場で資産・商品価格や為替レートのボラティリティが歴史的に見ても低い水準で推移しており、この「世界同時夏枯れ」現象(日本経済新聞2014. 7.25 朝刊)が話題となっている。しかし、市場参加者の多くは、相場の風状態が長期的に継続する可能性が高いとは考えておらず、むしろ、嵐の前の静けさに過ぎない可能性を警戒(立場によっては波乱を待望)しているようである(前掲記事及び多くのブログ・新聞記事より)。市場参加者がより定量的にこのようなボラティリティの現状把握と将来の予想を行う場合、ボラティリティ変動モデルが道具として有用である。

ボラティリティを資産価格変化率の確率分布の標準偏差等として定量的に定義する場合、それは直接観測できない潜在変数であるため、市場価格の過去データからボラティリティ実現値及び時系列での変動特性(平均回帰傾向等)を推定し、さらに将来の値を予測するボラティリティ変動モデルが開発されてきた(黒瀬 2013)。また、オプションの市場価格からその原資産価格のボラティリティを逆算するインプライド・ボラティリティ・アプローチも、近年、洗練された手法による CBOE VIX 米国市場ボラティリティ指数の成功に触発され広まりを見せている。日本株式市場に関しても、公表ベースのボラティリティ指数として VIX 型の日経平均 VI や改良 VIX 型の大阪大学 VXJ がある(渡部 2013)。さらに、2012 年に大証に日経平均 VI 先物が上場され、日本のボラティリティ・ビジネスが新局面を迎えている今日、ボラティリティ変動モデルの有用性は益々高まっているといえるだろう¹。

本稿では、数あるボラティリティ変動モデル推定アプローチのうち、実現ボラティリティをはじめとする「実現測度」ベースのモーメント法を説明するとともに、日経平均株価データに適用した実証例を報告する。

2. 連続時間ボラティリティ変動モデルとその推定：実現測度ベースの GMM

以下、資産価格(もしくは為替レート、日経平均のような株価指数)の自然対数 X_t は、次のようなジャンプ拡散過程に従うと仮定する(時間 t の単位は 1 日とする)：

$$dX_t = m dt + \sqrt{V_t} dW_t + dZ_t \quad (1)$$

$$Z_t = \sum_{i=1}^{J_t} c_i \quad (2)$$

$$dV_t = \kappa(\varphi - V_t) dt + \sigma\sqrt{V_t} dB_t \quad (3)$$

ここで、 $m, \kappa > 0, \varphi > 0, \sigma > 0$ は定数(実数)、 W_t, B_t はそれぞれブラウン運動、 Z_t は資産価格の不連続なジャンプ、 J_t は時間 0 から t までのジャンプの回数(確率変数)、 c_i は i 番目のジャンプの大きさ(J_t とは独立な、ゼロではない値をとる *i.i.d.* 確率変数)とする。このモデルでは、価格変動は不連続ジャンプによる変動と W_t による連続的で微小な変動の 2 つの部分から成るが、後者の影響をスケールする瞬間分散(スポッ

¹ ボラティリティ指数は、現時点のボラティリティ水準を知る目的のためには、ボラティリティ変動モデルによる推定を代替するものといえる。しかし、ボラティリティ指数をアンダーライニングとするボラティリティ・デリバティブ(日経平均 VI 先物等)の理論価格算定における期日ボラティリティ指数値の確率分布を求める上では、ボラティリティ変動モデルが役立つ(石田 2012)。

ト分散) V_t また、それ自体 B_t に駆動されランダム変動しつつも(その変動性は σ に依存)、 κ に依存するスピードで長期平均 φ に回帰する傾向を持つ。この (3) 式は、Feller 過程、Cox-Ingersoll-Ross 過程、または、ここでのようにボラティリティ変動モデルとして用いられる場合は Heston 過程と呼ばれる。近年、より一般的なモデルも提案されているが、このモデルは様々な金融データの特徴を捉えつつも解析的に扱い易く、数理ファイナンスで広く用いられている。未知パラメータを資産価格の過去時系列データのみから統計的に推定する場合、瞬間分散 V_t は潜在変数となるので、問題の難易度が高まる。本稿では、未知パラメータのうち、瞬間分散の変動方程式(式(3))を決める $\theta \equiv (\kappa, \varphi, \sigma)'$ に焦点を当て、Corradi and Distaso (2006) が提案した、高頻度資産価格時系列データを用いる GMM 推定の統計手法(以下、CD 法)を紹介する。

GMM (generalized method of moments, 一般化モーメント法) は、モデルが含意する母集団モーメント(パラメータの関数)とデータから得られる標本モーメントが一致するように未知パラメータの値を選ぶモーメント法を一般化したものである(詳しくは、Hamilton (1994)を参照されたい)。そこで、まず推定に用いる母集団モーメントの構築から説明する。瞬間分散の 1 日間の累積値(累積分散, integrated variance, IV)を

$$IV_t(\theta) \equiv \int_{t-1}^t V_s ds \quad (4)$$

と定義すれば、仮定したモデルの下では、その母集団のモーメント(平均、分散、及び k 次の自己共分散)は、パラメータ θ の関数として次のように明示的に表現することができる;

$$E[IV_t(\theta)] = \varphi \quad (5)$$

$$Var[IV_t(\theta)] = \frac{\varphi\sigma^2}{\kappa^3} (e^{-\kappa} + \kappa - 1) \quad (6)$$

$$AC[IV_t(\theta), k] = \frac{\varphi\sigma^2}{2\kappa^3} (1 - e^{-\kappa})^2 e^{-\kappa(k-1)} \quad (7)$$

(記号 $IV_t(\theta)$ は θ への依存を強調)。Corradi and Distaso (2006)は、フレキシブルでありつつも IV のモーメントを明示的に表現できる、固有関数ボラティリティ・モデルと呼ばれるモデルに基づき推定・検定理論を展開している。(3) 式を含め、多くのボラティリティ変動モデルは固有関数ボラティリティの特殊ケースである。IV モーメントの明示的な表現が得られないようなボラティリティ変動モデルを推定する場合でも、原理的には解析的な近似やシミュレーション手法に頼ることにより CD 法を用いることができるが、簡便な方法であるというこのアプローチの魅力はそがれる。

次に、標本モーメントの構築であるが、実現日次 IV は価格データからはわからないので、IV の標本モーメントは作れない。そこで、CD 法では、いくつかの条件の下で $IV_t \approx RM_t$ (RM_t は後述の「実現測度」。観測可能な数量)であることに着目し、 $IV_t(\theta)$ の母集団モーメントがそれぞれ RM_t の標本モーメント

$$\overline{RM} \equiv E[\widehat{RM}_t] \equiv T^{-1} \sum_{t=1}^T RM_t \quad (8)$$

$$Var[\widehat{RM}_t] \equiv T^{-1} \sum_{t=1}^T (RM_t - \overline{RM})^2 \quad (9)$$

$$AC[\widehat{RM}_t, k] \equiv T^{-1} \sum_{t=1}^T (RM_t - \overline{RM})(RM_{t-k} - \overline{RM}) \quad (10)$$

(T は標本サイズ = 観測日数)となるべくマッチするように選んだ値 $\hat{\theta} \equiv (\hat{\kappa}, \hat{\varphi}, \hat{\sigma})'$ を推定値とする。平均、分散に加え $K > 1$ までの次数の自己共分散を用いる場合、動かせる未知パラメータ 3 個ですべてのモーメント条件を完全に満たすことはできないので

$$g(\theta) \equiv \begin{pmatrix} E[IV_t(\theta)] - \overline{RM} \\ Var[IV_t(\theta)] - Var[\overline{RM}_t] \\ AC[IV_t(\theta), 1] - AC[\overline{RM}_t, 1] \\ \vdots \\ AC[IV_t(\theta), 1] - AC[\overline{RM}_t, K] \end{pmatrix} \quad (11)$$

とし、目的関数 $g(\theta)'W^{-1}g(\theta)$ を最小化する値 $\hat{\theta}$ を選ぶ。ただし、彼女らの方法では通常の 2 ステップ GMM とは若干異なる方法で算出するウェイト行列 W が用いられる。

以上、CD 法を例として、実現測度のモーメントによるボラティリティ変動モデルの推定手続を紹介したが、説明を後回しにした実現測度 (realized measures, RM) の利用こそがこのアプローチの肝心な部分である。日々のボラティリティ指標である日次 IV は事後的にも直接観測できない。しかし、90 年代以降、多くの資産の価格の日中高頻度データが整備され始め、数分間の短期間の価格変化率の二乗を 1 日分合計した数量 (観測可能) で IV を近似できることが着目されるようになり、ボラティリティ分析においてその利用が広まってきた。この数量は、(確率変数であるボラティリティの実現値という意味で) 実現分散、もしくは、実現ボラティリティと呼ばれる (以下、realized variance/volatility を略して RV)。価格ジャンプや価格観測誤差 (ビッド・アスク・スプレッド等によるノイズ) が無い理想的な状況では、RV を構成する個々の短期間変化率の計測期間が短くなるにつれ IV 近似精度が高まる (期間がゼロに近づく極限ではある意味で一致する)。しかし、観測価格データに価格ジャンプや観測誤差等が含まれる場合はその限りではない。観測誤差の影響が大きくなることを避けるため RV は 5 分程度以上の間隔の変化率から求められることが多い。実現したジャンプの二乗は RV に加算されてしまうが IV には含まれないことに注意してほしい。IV 近似阻害要因に対してロバストな修正 RV として様々なものが提案されるに至っているが、ベーシックな RV と修正 RV を総称して「実現測度」 (realized measures, RM) と呼ぶ。Corradi and Distaso (2006) は、RM ベースの GMM によりボラティリティ変動モデルを推定・検定する前述の CD 法の理論を展開するにあたり、RM として具体的には RV に加え、ジャンプがある場合にもロバストな IV 推定量である実現バイパワーバリエーション (RBV)、ノイズの影響に対してロバストな two-scale 推定量を用いた場合について分析した。本稿次節の実証例では RV、RBV に加えて実現カーネル (realized kernel, RK、ノイズの影響に対してロバストな IV 推定量) を用いた²。各種の RM の詳細については生方・渡部 (2011)、もしくは、Aït-Sahalia and Jacod (2014) を参照されたい。

なお、次節で報告する日経平均株価への応用例では、パラメータの関数としての母集団モーメントの (5)-(7) 式に若干の変更を加えた次式を用いた推定も行った：

$$E[IV_t(\theta)] = \varphi\Delta \quad (12)$$

$$Var[IV_t(\theta)] = \frac{\varphi\sigma^2}{\kappa^3} (e^{-\kappa\Delta} + \kappa\Delta - 1) \quad (13)$$

$$AC[IV_t(\theta), k] = \frac{\varphi\sigma^2}{2\kappa^3} (1 - e^{-\kappa\Delta})^2 e^{-\kappa(k-\Delta)} \quad (14)$$

ここでは、 $IV_t(\theta)$ は 1 日の取引時間帯の IV、 Δ は 1 日うちの市場の取引時間を表す (時間単位は 1 日なので、 Δ は 1 日に占める取引時間の比率でもある)。Corradi and Distaso (2006) をはじめ、連続時間ボラティリ

² もちろん、RV 等に含まれる価格ジャンプ要因は、価格変化率のトータルでのボラティリティを知る上での貴重な情報原で、常に邪魔ものということではない。本稿での要点は、(11) 式のようなモーメント条件の正当化である。IV の母集団モーメントとジャンプの影響を除くタイプの RM の標本モーメントをマッチするのではなく、逆に、「IV+ジャンプ二乗和」の母集団モーメントとジャンプ二乗和が含まれるようなタイプの RM の標本モーメントをマッチする方法もある。

ティ変動モデルの実現測度ベースの GMM 推定を扱うほとんどの論文では非取引時間帯の存在が無視されているが³、それでは、例えば、日経平均株価の場合、5 時間の RM と 24 時間の IV の母平均をマッチしようとする事になりバイアスが生じる。また、夜間(長さは 18 時間)にも瞬間分散の平均水準への回帰は進行すると期待されるので、IV の自己共分散にもそれを反映させる必要が生じる。これらを考慮して、本稿独自に修正式(12)-(14)を導出したが、その際、「取引時間中と取引時間外の価格変動は同形かつ同じパラメータ値の確率過程に従う」という仮定を置いた。もちろん、これは非現実的である。さらなる簡改良策としては、 Δ として、単なる取引所オープン時間比率よりも適した値を選ぶこと等が考えられる。

本稿では CD 法に焦点を当てたが、連続時間ボラティリティ変動モデルの実現測度ベースの GMM 推定としては、他にも、無条件モーメントではなく条件付モーメントを用いるアプローチ、オプション価格やボラティリティ指数値を併用するアプローチ等がある。また、今回対象としなかったジャンプ項に関わるパラメータや、株価ボラティリティの分析において重要となるレバレッジ・パラメータ(株価とボラティリティそれぞれを駆動するブラウン運動の相関)の推定、2 ファクター・ボラティリティ・モデル(本稿の(3)式は 1 ファクター・モデル)の推定も試みられている。詳しくは、Bregantini (2013)及びその参考文献を参照されたい。

3. 日経平均株価データへの適用結果

応用例として、日経平均株価のボラティリティ変動モデル(3)式を CD 法により推定した結果を下表に示した。実現測度 RM のデータとしては、オックスフォード大学 Man Institute の Realized Library サイトよりダウンロードした、2000年1月4日から2014年7月31日までの日次 RV、RBV、RK を用いた(RV、RBV は 5 分変化率ベースのもの。標準偏差で考えると%になるようにオリジナルのデータを 10,000 倍した。年率換算は行っていない。データの詳細については Heber et al. (2009)を参照されたい)。モーメント条件としては平均、分散と 1・2 次の自己共分散を用いた。非取引時間の調整をしない推定の結果を表左側、調整を行う推定の結果を表右側に示した(推定値の下段括弧内の値は標準誤差。各列は、RM として RV、RK、RBV それぞれを用いた場合)。調整においては、1 日の取引時間を 5 時間(過去の 4.5 時間の期間も含めて)とし、昼休みの存在は無視、また、土日・祝日の特別な調整は行わなかった。

表 日経平均株価ボラティリティ変動モデル推定結果

	非取引時間調整なし			非取引時間調整あり		
	RV	RK	RBV	RV	RK	RBV
κ	.2118 (.1482)	.2872 (.1736)	.3432 (.2121)	.3034 (.1256)	.3022 (.1185)	.3603 (.1311)
φ	1.0803 (.0472)	1.1100 (.0532)	.9405 (.0456)	5.0928 (.2294)	5.2599 (.2616)	4.4814 (.2289)
σ	.7887 (.3365)	1.0421 (.3721)	1.1020 (.4294)	2.3078 (.5542)	2.5901 (.5768)	2.7954 (.6363)
J	8.2790	7.4339	6.4543	5.4855	4.6587	3.6149
(p 値)	(.0040)	(.0064)	(.0111)	(.0192)	(.0573)	(.0573)

³ 例外的に Ishida et al. (2011) は、CD 法とは異なる実現ボラティリティ測度ベースの GMM 推定の文脈で、非取引時間の無視がもたらすパラメータ推定バイアスの大きさを分析し、本稿と同様な非取引時間調整を行っている。

推定結果より、ボラティリティの平均回帰スピード κ 、長期平均水準 φ 、ボラティリティのボラティリティ σ に関する推論や、将来のボラティリティに関する予測ができる。実現測度による結果の違いとしては、例えば、事前にも予想されたように、RV よりも RBV を用いた場合の φ 推定値が小さくなっていることがあげられる(ジャンプ二乗を含まないIVの母集団平均 $\varphi\Delta$ のマッチング相手としてはジャンプ二乗を含まないタイプのRMの標本平均を用いた方が選ばれる φ は低くなる)。非取引時間調整を行った場合は、例えば、調整しない場合と比較して、 φ が 4 倍以上に推定されている。取引時間内・外でボラティリティの水準や変動特性が同じであるとする仮定が素直に反映されているようであるが、夜間ボラティリティを過大している可能性が高い。

表の最下行に $J \equiv Tg(\hat{\theta})'W^{-1}g(\hat{\theta})$ を示した。モデルが正しければ、 J は近似的にカイ二乗分布(自由度はモーメント条件数から推定パラメータ数を引いたもの)に従う。この統計量による RK、RBV を用いた非取引時間調整付推定のケースでは、5%水準の J 検定で式 (3) を棄却できなかった。ただし、すべてのケースで $2\hat{\kappa}\hat{\varphi} - \hat{\sigma}^2 < 0$ となっており、式(3)の瞬間分散がゼロに到達し張り付いてしまう可能性を排除する安定性条件 $2\kappa\varphi - \sigma^2 > 0$ は破られている。これは、このモデルでボラティリティ変動特性を十分に捉えることが難しいことを示唆している(安定性条件を制約として加えた推定ではリーズナブルな結果が得られなかった)。なお、IV 母集団モーメントのパラメータの関数としての表現は安定性を仮定して得られるものなので、結果の解釈には注意が必要である。

詳細は省略するが、サブ期間では、リーマン・ショック前の期間の方がそれ以降(2008 年 9 月を含む)の期間よりも J 検定の p 値は低かった(RK ベースの調整付推定の場合、ショック以降期には約 0.12、ショック前期にはほぼ 0)。日次 RV が極端に高い値をとったリーマン・ショック直後の 2008 年 10 月の数日、東日本大震災の翌週の 1 日、2013 年の 5.23 株価急落ショックの翌日をデータから外しても、推定結果に大差はなかった。

4. おわりに

本稿では、金融市場の高頻度データから構築される実現測度を用いて連続時間ボラティリティ変動モデルを推定する方法を紹介した。推定精度は用いる実現測度の IV (もしくは関連数量)の近似精度に依存する。応用例で用いた RV、RBV、RK は IV 推定量としてはどれも価格ジャンプと観測誤差の両方の存在に対してロバストではないが、近年、様々な実現測度が提案されており、それらの応用余地は大きい。

冒頭のモチベーションに戻れば、2014 年 7 月 31 日時点で低水準であったボラティリティ(RV は 2000 年以降の平均値約 1.0、最大値 32 超に対してこの日は 0.246)の行方については、本稿で紹介した平均回帰型の 1 ファクター・モデルが正しければ急速に長期平均に戻るものと期待でき、より計量的な予測も簡単にできる。しかし、データは必ずしもこのモデルの妥当性を支持するものではない。市場参加者が意識する、「ボラティリティ低下は長期水準自体の低下によるものか、それとも、すぐに平均水準に回帰するような一時的なものなのか」の問いに答えるためには、ボラティリティ変動を短期・長期の 2 つのファクターが駆動する 2 ファクター・モデルをはじめ、他の様々なモデルの利用が考えられる。

参考文献

- 石田 功 (2012) 「ボラティリティ・インデックス先物のプライシング」, 『先物オプションレポート』 24 (11).
 生方正人・渡部敏明 (2011) 「実現ボラティリティ —ボラティリティの計測手法とリスクマネジメントへの応用の可能性—」『証券アナリストジャーナル』 49(8), 16-25.

黒瀬雄大 (2013) 「時間変動する相関と確率ボラティリティモデル」, 『先物オプションレポート』 25 (11).

日本経済新聞 2014.7.25 付朝刊 「スクランブル:世界同時『夏枯れ』深刻」.

渡部敏明 (2013) 「モデル・フリー・インプライド・ボラティリティの計算方法について」, 『先物オプションレポート』 25 (7).

Aït-Sahalia, Y., Jacod, J. (2014). *High-Frequency Financial Econometrics*. Princeton University Press.

Corradi, V., Distaso, W. (2006). “Semi-Parametric Comparison of Stochastic Volatility Models Using Realized Measures.” *Review of Economic Studies* 73, 635-667.

Bregantini, D. (2013). “Moment-based Estimation of Stochastic Volatility.” *Journal of Banking & Finance* 37,4755-4764.

Hamilton, D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.

沖本竜義・井上智夫訳 (2006) 『時系列解析 下(非定常／応用定常過程編)』 シーエービー出版.

Heber, G., Lunde, A., Shephard, N., Sheppard, K. (2009). “Oxford-Man Institute's Realized Library,” Oxford-Man Institute, University of Oxford. <http://realized.oxford-man.ox.ac.uk/>.

Ishida, I., McAleer, M., Oya, K. (2011). “Estimating the Leverage Parameter of Continuous-Time Stochastic Volatility Models Using High Frequency S&P 500 and VIX.” *Managerial Finance* 37, 1048-1067.

本資料に関する著作権は、株式会社大阪取引所にあります。

本資料の一部または全部を無断で転用、複製することはできません。

本資料は、デリバティブ商品の取引の勧誘を目的としたものではありません。