長期記憶モデルによる日経 225 先物のボラティリティに関する実証分析

日本大学経済学部准教授　三井秀俊

1. はじめに

本稿では, 日経 225 先物のボラティリティの長期記憶 (long memory) 性に焦点を当て実証分析を行なう. ボラティリティの長期記憶性が存在するならば, 長期の限月をもつ先物の価格付けが, より正確に行なうことができるようになる. 長期記憶性を捉えるため Baillie *et al.* (1996) の FIGARCH (Fractionally Integrated GARCH) モデルと Bollerslev and Mikkelsen (1996) の FIEGARCH (Fractionally Integrated Exponential GARCH) モデルを使用する. また, 株価収益率の分布は, 正規分布よりも裾が厚い分布 (fat tail) であることが知られている[1]. そのため ARCH 型モデルの誤差項には, 正規分布以外の仮定をおく場合が多い. 多くの先行研究では, 誤差項の分布に正規分布よりも尖度の高い分布を用いた方が当てはまりが良いとの結果が得られている. したがって, 本稿では, 誤差項の分布として正規分布の他に, Student-t 分布 (Student-t distribution), 一般化誤差分布 (GED: Generalized Error Distribution), skewed-Student t 分布 (skewed-Student t distribution) を使用することにする. これらの誤差項を仮定した FIGARCH モデルと FIEGARCH モデルにより日経 225 先物価格のボラティリティの変動性に関して分析を行なう.

2. 分析モデル

2.1 FIGARCH モデルと FIEGARCH モデル

t 時点の日経 225 先物の収益率を R_t とする. P_t を t 時点の日経 225 先物価格の水準とすると, t 時点の日経 225 先物の収益率 R_t は以下のように表される.

$$R_t = (\ln P_t - \ln P_{t-1}) \times 100\ . \tag{1}$$

このとき, 収益率 R_t の過程を以下のようにおく.

$$R_t = \mu + \epsilon_t, \quad \epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad z_t \sim i.i.d., E[z_t] = 0, Var[z_t] = 1. \tag{2}$$

ここで, 定数項 μ は期待収益率, ϵ_t は誤差項であり, 収益率に自己相関は無いと仮定する. $i.i.d.$ は, 過去と独立で同一な分布 (independent and identically distributed) を表す. $E[\cdot]$ は期待値, $Var[\cdot]$ は分散を表す. 本稿では, ボラティリティの変動の特性を捉えるために, Baillie *et al.* (1996) が提案した FIGARCH モデルと Bollerslev and Mikkelsen (1996) が提案した FIEGARCH モデルを用いる. FIGARCH(p, d, q) モデルは, ボラティリティσ_t^2 が以下の過程で表される.

$$\sigma_t^2 = \omega\,[1 - \beta(L)]^{-1} + \left\{1 - [1 - \beta(L)]^{-1}\phi(L)(1 - L)^d\right\}\epsilon_t^2. \tag{3}$$

ここで, $\beta(L) = \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \cdots + \beta_p L^p$, $\phi(L) = [1 - \alpha(L) - \beta(L)](1 - L)^{-1}$, $\alpha(L) = \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \cdots + \alpha_q L^q$ を表す. また, L はラグ・オペレータ (Lag operater) を表し, $L^i y_t = y_{t-1}, (i = 0, 1 \ldots)$ となる. $(1 - L)^d$ は,

[1] 渡部・佐々木 (2005) では, AR(1)-FIEGARCH モデルにより日経 225 先物の実証研究を行なっているが, 誤差項には正規分布を仮定している.

以下のように表現される.

$$(1-L)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d-k+1)} L^k$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(d-1)\cdots(d-k+1)}{k!}(-L^k). \tag{4}$$

ここで, $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数 (gamma function) である. $(1-L)^d$ における d が長期記憶性を捉えるパラメータを示す. $0 < d < 1$ となるとき, ボラティリティ σ_t^2 は長期記憶過程に従っていることがわかる. また, $0 < d < 0.5$ のとき定常長期記憶過程と呼び, $0.5 \leq d < 1$ のとき非定常長期記憶過程と呼ぶ. $d = 1$ のとき, ボラティリティσ_t^2 は単位根を持ち非定常過程となる. $d = 0$ のとき短期記憶過程となり, Bollerslev (1986) の GARCH (p, q) モデルとなる. ここで, FIGARCH$(1, d, 1)$ モデルは以下のように表される.

$$\sigma_t^2 = \omega\,[1-\beta_1(L)]^{-1} + \left\{1 - [1-\beta_1(L)]^{-1}\phi_1(L)(1-L)^d\right\}\epsilon_t^2. \tag{5}$$

FIEGARCH (p, d, q) モデルは, ボラティリティ σ_t^2 が以下の過程で表される.

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \phi(L)^{-1}(1-L)^{-d}[1+\alpha(L)]g(z_{t-1}), \tag{6}$$
$$g(z_{t-1}) = \theta z_{t-1} + \gamma[|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|], \tag{7}$$

$$g(z_{t-1}) = \begin{cases} (\theta+\gamma)|z_{t-1}| - \gamma E(|z_{t-1}|), & \text{if} \quad z_{t-1} > 0, \\ (-\theta+\gamma)|z_{t-1}| - \gamma E(|z_{t-1}|), & \text{if} \quad z_{t-1} < 0. \end{cases}$$

ここでは, ボラティリティの対数値を被説明変数としてパラメータの非負制約を取り除き定式化されている. $\theta < 0$ ならば, 資産価格が上昇した日の翌日よりも, 資産価格が下落した日の翌日の方がボラティリティは上昇する. このモデルでは, ボラティリティの対数値を被説明変数としているため $\omega, \beta, \alpha, \theta, \gamma$ に非負制約は必要としない. $d = 0$ のとき, Nelson (1991) の EGARCH (p, q) モデルとなる.

次数 p, q の選択は, 過去の実証研究において $p = 1$, $q = 0$ とする場合が多いので, 本稿でも FIGARCH $(1, d, 0)$, FIEGARCH $(1, d, 0)$ を用いて分析を行なう. FIGARCH $(1, d, 0)$ は, 以下のように表現される.

$$\sigma_t^2 = \omega\,[1-\beta_1(L)]^{-1} + \left\{1 - [1-\beta_1(L)]^{-1}(1-L)^d\right\}\epsilon_t^2. \tag{8}$$

また, FIEGARCH $(1, d, 0)$ は以下のように表現される.

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + [1-\beta_1(L)]^{-1}(1-L)^{-d}g(z_{t-1}), \tag{9}$$
$$g(z_{t-1}) = \theta z_{t-1} + \gamma[|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|].$$

これらのモデルを用いて日経 225 先物のボラティリティの変動特性に関して実証分析を行なう.

2.2 誤差項の分布の仮定

本稿では, z_t の分布として, 標準正規分布, 基準化された Student-t 分布, 一般化誤差分布, 基準化された skewed-Student t 分布を使用することにする.

(i) Student-t 分布: 基準化された Student-t 分布の密度関数 $f_{(t)}(z_t; \nu)$ は以下のように与えられる.

$$f_{(t)}(z_t; \nu) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi(\nu-2)}} \left(1 + \frac{z_t^2}{\nu-2}\right)^{-(\nu+1)/2}, \quad \nu > 2. \tag{10}$$

ここで, ν は自由度 (degree of freedom) を表す. Student-t 分布は 0 について左右対称となり, $\nu > 4$ に対して尖度は 3 よりも大きくなる. また, $\nu \to \infty$ のとき標準正規分布の密度関数に収束する.

(ii) GED: GED の密度関数 $f_{(GED)}(z_t;\nu)$ は以下のように与えられる.

$$f_{(GED)}(z_t;\nu)=\frac{\nu\exp\left(-\frac{1}{2}\left|z_t/\lambda_\nu\right|^\nu\right)}{\lambda_\nu 2^{(1+\frac{1}{\nu})}\Gamma\left(1/\nu\right)},\quad \nu>0,\quad \lambda_\nu=\sqrt{\frac{\Gamma\left(1/\nu\right)2^{(-2/\nu)}}{\Gamma\left(3/\nu\right)}}. \tag{11}$$

ここで, ν は裾の厚さを示すパラメータである. $\nu=2$ のとき z_t は標準正規分布に従う. $\nu<2$ のとき正規分布より裾が厚い分布に従い, $\nu>2$ のとき正規分布より裾が薄い分布に従う.
(iii) skewed-Student t 分布: 基準化された skewed-Student t 分布の密度関数 $f_{(skt)}(z_t;\nu,\xi)$ は以下のように与えられる.

$$f_{(skt)}(z_t;\nu,\xi)=\frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi(\nu-2)}}\left(\frac{2s}{\xi+1/\xi}\right)\left(1+\frac{(sz_t+m)^2}{\nu-2}\xi^{-2I_t}\right)^{-(\nu+1)/2},\quad \nu>2. \tag{12}$$

ただし,

$$I_t=\begin{cases}1 & \text{if } z_t\geq -\frac{m}{s}\\ -1 & \text{if } z_t<-\frac{m}{s}\end{cases} \tag{13}$$

とする. ここで, ν は自由度を表し分布の厚さを示す. ξ は非対称パラメータを表し, 分布の歪みを示す. また,

$$m=\frac{\Gamma((\nu+1)/2)\sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu/2)}\left(\xi-\frac{1}{\xi}\right),\quad s=\sqrt{\left(\xi+\frac{1}{\xi}-1\right)-m^2} \tag{14}$$

である. $\xi=1$, あるいは, $\ln(\xi)=0$ のとき左右対称となり Student-t 分布と等しくなる. $\xi>1$, あるいは, $\ln(\xi)>0$ のとき分布の右裾が厚くなる. また, $\xi<1$, あるいは, $\ln(\xi)<0$ のとき分布の左裾が厚くなる[2)].

z_t の分布が標準正規分布, 基準化された Student-t 分布, GED, 基準化された skewed-Student t 分布に従う場合, (2) 式の z_t は, 各々, $z_t\sim i.i.d.N\left(0,1\right)$, $z_t\sim i.i.d.t\left(0,1,\nu\right)$, $z_t\sim i.i.d.GED\left(0,1,\nu\right)$, $z_t\sim i.i.d.skt\left(0,1,\nu,\xi\right)$ のように表現される.

2.3 推定法

パラメータ集合を Θ とするとき, FIGARCH $(1,d,0)$ モデルの誤差項が正規分布に従うときには $\Theta=(\mu,\ \lambda,\ \omega,\ d,\ \beta_1)$, 誤差項が Student-$t$ 分布, GED に従うときには自由度 ν が追加され $\Theta=(\mu,\ \lambda,\ \omega,\ d,\ \beta_1,\ \nu)$, 誤差項が skewed-Student t に従うときには ξ が追加され $\Theta=(\mu,\ \lambda,\ \omega,\ d,\ \beta_1,\ \nu,\ \xi)$ となる. また, FIGARCH$(1,d,0)$ の場合には, 各々の FIGARCH $(1,d,0)$ モデルパラメータ集合に θとγ が追加される[3)]. このとき尤度関数は以下のようになる.

$$\begin{aligned}L(\Theta)&=f(R_1,R_2,\cdots,R_T|\Theta)\\&=\prod_{t=1}^{T}\frac{1}{\sigma_t}f\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma_t}\right).\end{aligned} \tag{15}$$

したがって, 対数尤度関数は,

$$\ln L(\Theta)=-\sum_{t=1}^{T}\ln(\sigma_t)+\sum_{t=1}^{T}\ln f\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma_t}\right) \tag{16}$$

となる. G@RCH を利用して対数尤度関数を最大化することによりパラメータの推定を行なう[4)].

---

2)詳しくは, Bauwens and Laurent (2005) を参照.
3)誤差項が正規分布に従うときには $\Theta=(\mu,\ \lambda,\ \omega,\ d,\ \beta_1\ \theta,\ \gamma)$, 誤差項が Student-$t$ 分布, GED に従うときには $\Theta=(\mu,\ \lambda,\ \omega,\ d,\ \beta_1,\ \theta,\ \gamma,\ \nu)$, 誤差項が skewed-Student t に従うときには $\Theta=(\mu,\ \lambda,\ \omega,\ d,\ \beta_1,\ \theta,\ \gamma\ \nu,\ \xi)$ となる.
4)詳しくは, Xekalaki and Degiannakis (2010) を参照.

表 1: 収益率 R_t (%) の基本統計量

2000 年 1 月 5 日 – 2012 年 10 月 31 日, 標本数 3154

	平均	標準偏差	歪度	尖度	最大値	最小値	正規性検定
日経 225 先物	-0.024	1.631	-3.05	15.28	18.81	-14.00	3973.**

$**$ は有意水準 1 % で有意であることを示す.

3. 実証分析

3.1 データ

本稿では, データとして大阪証券取引所で取引されている日次の日経 225 先物価格[5)]の終値を使用し, 日経 NEEDS-FinancialQuest からデータを取得した. 先物データ系列は各限月ごとに分かれているため, 期近物を繋げることによりデータ系列の作成を行なった. 収益率の標本期間は, 2000 年 1 月 5 日から 2012 年 10 月 31 日まで, 標本数は 3154 である. データの基本統計量として, 平均, 標準偏差, 歪度, 尖度, 最大値, 最小値, 正規性の検定統計量が表 1 に纏められている. 尖度について, 3 を超えていることから, また, 正規性検定が有意なことから, 日経 225 先物の収益率の分布は正規分布よりも裾が厚いことがわかる.

3.2 実証結果

本稿の推定結果は, 表 2 に纏められている. 推定結果を纏めると以下のようになる.

(i) FIGARCH $(1, d, 0)$ モデル: μ に関しては, 誤差項が正規分布, skewed-Student t 分布に従う場合には有意ではなく, GED 分布, Student-t 分布に従う場合には統計的に有意な結果となった. ω に関しては, 全ての分布に関して統計的に有意な推定値となった. 長期記憶性を示す d の推定値は, 0.481, 0.510, 0.493, 0.836 であり, 統計的に有意な結果が得られた. ただし, d の推定値が $0 < d < 0.5$ の定常長期記憶過程の場合と $0.5 \leq d < 1$ の非定常長期記憶過程の場合に分かれる結果となった. β_1 はボラティリティ の持続性を表すパラメータであり, 全ての分布に関して統計的に有意な推定値となっている. 自由度 ν に関して, t 分布, skewed-Student t の場合には推定値は各々 8.749, 9.369 であり統計的に有意な結果となり, 各々, $\nu > 4$ となっている. また, GED 分布の場合にも推定値は 1.479 であり統計的に有意な結果となり $\nu < 2$ となっている. これらの結果より, 日経 225 先物価格の収益率は正規分布よりも裾の厚い分布に従っていることがわかる. また, 非対称パラメータ $\ln(\xi)$ の推定値は -0.106 で統計的に有意であり, 収益率の分布の左裾が厚いことを示している.

(ii) FIEGARCH $(1, d, 0)$ モデル : μ に関しては, 全ての分布について統計的に有意ではなく, ω に関しては, 全ての分布に関して統計的に有意な推定値となった. 長期記憶性を示す d の推定値は, 0.167, 0.467, 0.223, 0.138 であり, 統計的に有意な結果が有意な結果が得られた. d の推定値が $0 < d < 0.5$ であるということは, 日経 225 先物のボラティリティ σ^2 の過程は, 定常長期記憶過程に従っていることがわかる. β_1 は, 全ての分布に関して統計的に有意な推定値となっている. 非対称性を示すパラメータ θ に関しては, 全ての分布において統計的に有意な結果が得られた. 自由度 ν に関して, Student-t 分布, skewed-Student t の場合には推定値は各々 5.845, 12.10 であり統計的に有意な結果となり $\nu > 4$ となっている. また, GED 分布の場合にも推定値は 1.557 であり統計的に有意な結果となり $\nu < 2$ となっている. これらの結果より, ここでも日経 225 先物価格の収益率は正規分布よりも裾の厚い分布に従っていることがわかる. また, $\ln(\xi)$ の推定値は -0.110 で統計的に有意であり, ここでも日経 225 先物価格の収益率の分布の左裾が厚いことを示されている.

[5)] 9：00–15:15 に取引される日経 225 先物を研究対象とする. 16：00–翌日 3:00 のナイト・セッションに関しては研究対象としない. また, CME (Chicago Mercantile Exchange) や SGX-DT (Singapore Exchange Derivatives Trading Limited) で取引されている日経 225 先物も対象外とする.

表 2: モデルの推定結果

$$R_t = \mu + \epsilon_t,\ \epsilon_t = \sigma_t z_t,\ \sigma_t > 0,\ z_t \sim i.i.d., E[z_t] = 0, Var[z_t] = 1.$$

$$FIGARCH(1,d,0):\ \sigma_t^2 = \omega\,[1-\beta_1(L)]^{-1} + \left\{1 - [1-\beta_1(L)]^{-1}(1-L)^d\right\}\epsilon_t^2.$$

$$FIEGARCH(1,d,0):\ \ln(\sigma_t^2) = \omega + [1-\beta_1(L)]^{-1}(1-L)^{-d} g(z_{t-1}),$$

$$g(z_{t-1}) = \theta z_{t-1} + \gamma[|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|].$$

	$FIGARCH(1,d,0)$				$FIEGARCH(1,d,0)$			
	n	t	GED	skt	n	t	GED	skt
μ	0.035	0.049*	0.050*	0.028	0.011	0.076*	0.010	0.008
	(1.546)	(2.249)	(2.247)	(1.249)	(0.513)	(2.242)	(0.482)	(0.363)
ω	0.094*	0.079*	0.084*	0.037*	0.765*	0.914*	0.502*	0.426*
	(3.066)	(3.262)	(3.175)	(2.189)	(5.066)	(3.939)	(2.034)	(2.094)
d	0.481*	0.510*	0.493*	0.836*	0.167*	0.467*	0.223*	0.138*
	(3.962)	(2.608)	(3.660)	(9.924)	(3.254)	(9.650)	(2.440)	(2.664)
β_1	0.425*	0.494*	0.459*	0.807*	0.924*	0.388*	0.912*	0.945*
	(3.229)	(2.418)	(3.193)	(11.63)	(12.18)	(2.046)	(4.474)	(17.55)
θ	−	−	−	−	−0.089*	−0.225*	−0.082*	−0.082*
					(−4.668)	(−4.104)	(−3.947)	(−4.186)
γ	−	−	−	−	0.156*	0.006*	0.139*	0.138*
					(5.476)	(2.668)	(3.874)	(4.685)
ν	−	8.749*	1.479*	9.369*	−	5.845*	1.557*	12.10*
		(6.089)	(21.43)	(5.887)		(9.177)	(21.21)	(4.724)
$\ln(\xi)$	−	−	−	−0.106*	−	−	−	−0.110*
				(−4.308)				(−4.258)
Log-lik.	−5526.07	−5481.37	−5488.41	−5472.48	−5486.08	−5559.74	−5461.73	−5448.24
$Q(20)$	12.25	11.61	11.90	11.66	14.38	20.52	13.70	13.72
$Q^2(20)$	20.36	36.25	24.56	29.76	19.52	27.52	19.50	20.83

*は有意水準 5%で有意であることを示す. 括弧内の数値は t 値を表す.

次に, FIGARCH $(1,d,0)$ モデルと FIEGARCH $(1,d,0)$ モデルの定式化が正しいかどうかのモデルの診断を Ljung - Box の Q 統計量により行なう. 表 2 の $Q(20)$ と $Q^2(20)$ は, 各々20 次までの基準化した残差 $(\hat{\epsilon}\hat{\sigma}^{-1})$ とその 2 乗の Ljung - Box の Q 統計量を表している. ここでは, 漸近的に自由度 20 の χ^2 分布に従う. FIGARCH$(1,d,0)$ モデルと FIEGARCH $(1,d,0)$ モデルに関して統計的に有意な推定値が得られていない. 全ての $Q(20)$ と $Q^2(20)$ の値に対して, 帰無仮説は 10%有意水準でも棄却することはできない. ここから, FIGARCH $(1,d,0)$ モデルと FIEGARCH$(1,d,0)$ モデルは, 日経 225 先物のボラティリティの自己相関を捉えていることがわかる.

4. まとめ

本稿は, FIGARCH $(1,d,0)$ モデル, FIEGARCH $(1,d,0)$ モデルを用いて日経 225 先物のボラティリティの長期記憶性に関して実証分析を行なった. FIGARCH $(1,d,0)$ モデルについては, 誤差項が Student-t 分布, skewed-Student t 分布に従う場合には日経 225 先物のボラティリティは定常長期記憶過程に従っており, GED 分布, Student-t 分布に従う場合には非定常長期記憶過程に従っていることが明らかとなった. また,

FIEGARCH $(1, d, 0)$ モデルについては, ボラティリティは全ての分布に関して定常長期記憶過程に従っていることが明らかとなった. また, 日経 225 先物の収益率とボラティリティとの間には非対称性があることがわかった. 日経 225 先物価格の日次収益率の分布に対して Student-t 分布, GED 分布, skewed-Student t 分布などの正規分布よりも裾の厚い分布を用いることは有効であるという結果を得た. 今後の課題としては, 原資産の日経 225 についてはオプション取引も行なわれているので, FIGARCH モデル, FIEGARCH モデルによるオプション価格付けへの応用を行なうことも重要である[6]. また, ジャンプ過程, 曜日効果などをモデルに組み込んで分析を行なうことなどが考えられる.

参考文献

[1] 竹内 (野木森) 明香・渡部敏明 (2008), 「日本の株式市場におけるボラティリティの長期記憶性とオプション価格」, MTP フォーラム・日本ファイナンス学会『現代ファイナンス』, No.24, pp.45–74.

[2] 渡部敏明・佐々木浩二 (2005), 「日経 225 先物価格を用いた FIEGARCH モデルの推定」, 大阪証券取引所 『先物・オプションレポート』, Vol.17, No.8, pp.1–4.

[3] Baillie, R. T., T. Bollerslev and H. O. Mikkelsen (1996), “Fractionally Integrated Generalied Autoregressive Conditional Heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics,* 74, pp.3–30.

[4] Bauwens, L. and S. Laurent (2005), “A New Class of Multivariate Skew Densities, with Application to GARCH Models,” *Journal of Business and Economic Statistics,* 23, pp.346–354.

[5] Bollerslev, T. (1986), “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics,* 31, pp.307–327.

[6] Bollerslev, T. and H. O. Mikkelsen (1996), “Modeling and Pricing Long-Memory in Stock Market Volatility,” *Journal of Econometrics,* 73, pp.151–184.

[7] Nelson, D. B. (1991), “Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach,” *Econometrica,* 59, pp.347–370.

[8] Xekalaki, E. and S. Degiannakis (2010), *ARCH Models for Financial Applications,* Wiley.

[6] 竹内 (野木森)・渡部 (2008) では, FIEGARCH モデルにより日経 225 オプションの実証研究を行なっているが, 誤差項には正規分布を仮定している.