時間変動する相関と確率的ボラティリティモデル

大阪大学 金融・保険教育研究センター 大阪証券取引所寄附研究部門　黒瀬雄大

1　はじめに

代表的な金融時系列データである資産収益率の経時データ一般には、分散項の高変動（あるいは低変動）期間が持続するボラティリティ・クラスタリングの存在が実証分析により知られている。そうした性質をとらえるための、ボラティリティ(分散項) が時間変動するモデルとして一般的なのものは一般化自己回帰条件付き不均一分散 (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic, GARCH) モデルと確率的ボラティリティ(Stochastic Volatility, SV) モデルである (Bauwens et al. (2012)、渡部 (2000))。

これらは、ひとつの系列を対象とする一変量モデルにとどまらず、系列間の関係を説明するため、複数の系列を対象とする多変量モデルに拡張される。金融時系列間の相関はそれ自体が関心の対象であることに加え、実務上もその実態を知ることには意味があるためである。例えば資産運用などの際、資産収益率間の相関を考慮してポートフォリオを構成することで、有効なリスクヘッジとよりよいパフォーマンスが期待される点が挙げられる。

金融時系列データについて、そうした資産収益率間の相関は時間変動することも知られており (McNeil et al. (2005))、分散項のみならず資産収益率間の相関項も考慮すれば、より現実に即した金融時系列モデリングの実現につながる。データが多次元になると、推定するパラメータが一変数の場合と比較して急増して推定が困難になることが多いが、本稿ではその中で最も単純な、二変量の資産収益率データ系列を対象とする、データ間の相関が時間変動する SV モデルを取り扱う。GARCH 型のモデルは本シリーズの里吉・三井 (2011)、渡部 (2011)、三井 (2013) などに見られるように実証やモデルの拡張なども多いが、SV モデルは最尤法等で推定することは難しく、GARCH 型ほど利用されているわけではない。ここでは、そうした SV 型のモデルについて紹介し、実証面での有用性に触れていく。

そこで、本稿では二変量の SV モデルについてまず簡単に解説する。そして、二系列の実データに対して応用を行い、結果を説明する。最後に、三変数以上の場合についての拡張にも触れることにする。

2 相関が時間変動する確率的ボラティリティモデル

$\boldsymbol{y}_t = (y_{1t}, y_{2t})'$ を時点 t における二次元資産収益率ベクトルとし、$\boldsymbol{h}_t = (h_{1t}, h_{2t})'$ を時点 t における二次元の潜在変数ベクトル、g_t を別の潜在変数とする。

このとき、以下の二変量 SV モデルを考える。

$$\boldsymbol{y}_t = V_t^{1/2}\boldsymbol{\epsilon}_t, \quad \boldsymbol{\epsilon}_t \sim \mathrm{N}_2(\mathbf{0}_2, R_t), \quad t = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{h}_{t+1} = \boldsymbol{\mu} + \Phi(\boldsymbol{h}_t - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\eta}_t, \quad \boldsymbol{\eta}_t \sim \mathrm{N}_2(\mathbf{0}_2, \Omega), \quad t = 1, \ldots, n-1, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{h}_1 = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\eta}_0, \quad \boldsymbol{\eta}_0 \sim \mathrm{N}_2(\mathbf{0}_2, \Omega_0), \tag{3}$$

$$g_{t+1} = \gamma + \theta(g_t - \gamma) + \zeta_t, \quad \zeta_t \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2), \quad t = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

$$g_1 = \gamma + \zeta_0, \quad \zeta_0 \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2/(1-\theta^2)), \tag{5}$$

ただし $\mathbf{0}_2$ は二次元のゼロベクトルであり、

$$V_t = \begin{pmatrix} \exp(h_{1t}) & 0 \\ 0 & \exp(h_{2t}) \end{pmatrix}, \ t = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

$$R_t = \begin{pmatrix} 1 & \rho_t \\ \rho_t & 1 \end{pmatrix}, \ t = 1, \ldots, n, \tag{7}$$

$$\rho_t = \frac{\exp(g_t) - 1}{\exp(g_t) + 1}, \ t = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 \\ 0 & \phi_2 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{12} & \omega_{22} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

とする。

$\boldsymbol{h}_t$ は $\boldsymbol{y}_t$ の分散の対数を取ったもので、(2)(3) 式によりこれが AR(1) 過程に従い変動すると仮定している。ρ_t は y_{1t} と y_{2t} の相関項で、$(-1, 1)$ の範囲を動く。これは (8) 式により潜在変数 g_t を変換して得られるものとしている。(4)(5) 式により g_t は AR(1) 過程に従うよう定式化されており、これで ρ_t の時間変動を表現する。Ω_0 は、$\boldsymbol{h}_1$ が定常性条件を満たすように設定する。$\boldsymbol{\epsilon}_t$ の分散共分散行列は相関行列 R_t であり、対角項が 1 のものを使うことで基準化を行っている。誤差項 $\boldsymbol{\epsilon}_t, \boldsymbol{\eta}_t, \zeta_t, t = 1, \ldots, n$ は互いに独立とする。

3 実証結果

本節では日経 225 株価指数と、オーストラリア証券取引所 (Australian Securities Exchange Limited) を代表する株価指数であるオールオーディナリーズ指数 (All Ordinaries Index) を対象とした実証分析を、前節で取り上げたモデルについて行い、結果を説明する[1]。両系列について日次収益率を、終値の対数階差を 100 倍して計算し、それぞれ y_{1t} と y_{2t} とする。標本期間は 2000 年 5 月 1 日から 2013 年 4 月 30 日までとし、標本数は 3103 である。これをプロットし、下の図 1 にまとめた。

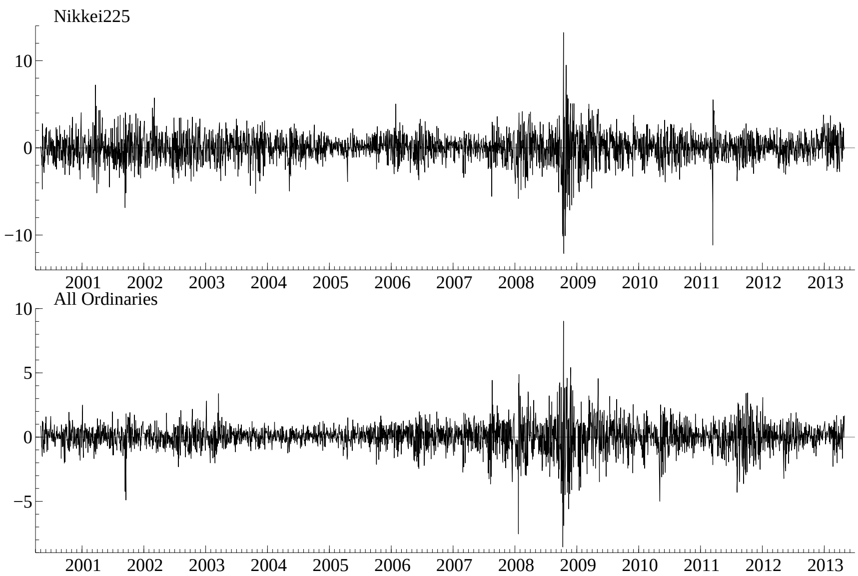

図 1: 時系列データ（日経 225、豪オールオーディナリーズ）

このデータについて、前節で取り上げたモデルを推定する。潜在変数の扱いが難しく最尤法などでは推定出来ないため、各パラメータに適宜事前分布を設定し、マルコフ連鎖モンテカルロ法によりベイズ推定を行う[2]。各パラメータについては省略し、潜在変数の推定結果のみここでは取り上げる。

図 2 の上段と中段は、y_{1t} と y_{2t} の時間変動する標準偏差の事後平均をプロットしたものである。両者とも、2008 年後半に世界金融危機が深刻化した時期に、顕著に増大している。前者は、東日本大震災の地震のあった 2011 年 3 月にも大きな増加が見られる。そうしたショックへの持続性などもあり、全体として自己相関が非常に高く、ボラティリティ・クラスタリングを

[1]データは日経 NEEDS-FinancialQuest を利用し取得した。
[2]経済・金融分野におけるベイズ推定については、例えば和合 (2005) に説明されている。

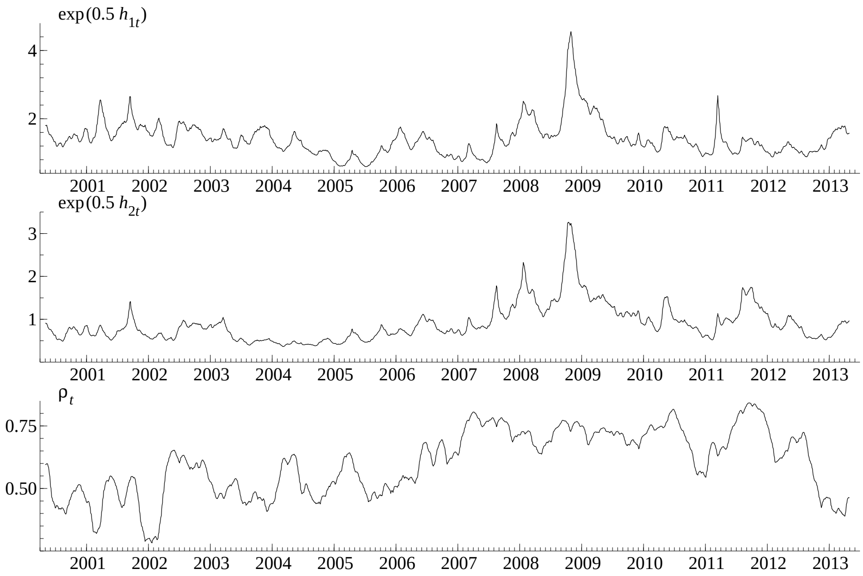

図 2: 収益率の標準偏差と収益率間の時間変動する相関の事後平均

とらえられていると言える結果となっている。

図 2 の下段は、y_{1t} と y_{2t} の時間変動する相関の事後平均をプロットしたものである。全期間を通じて定数には程遠く、明らかに時間変動しており、しかも自己相関は標準偏差と同様非常に高い。標準偏差が 2007 年以降、似通った動きをしていることは図 2 の上段と中段から読み取れるが、収益率間の相関項も 2007 年以降は高水準で推移している。2010 年の後半には一旦減少したものの、2011 年には欧州危機による市場の不安定化等もあってか相関項も高い状態で推移していた。しかし、2012 年から相関項は下落傾向にあり、2013 年初頭には 2000 年代初頭の水準に戻っている。

一般に、市場のストレスが高まった時期、つまり変動の大きい期間には、様々な株価収益率の相関が高まることがしばしば観察される (McNeil et al. (2005))。2007 年以降の米国サブプライムローン問題の表面化に始まり、2008 年後半に深刻化した世界金融危機の時期に、相関が増大していることはこの事実と整合的である。一方で、グローバル化の進展により各国経済の相互依存性が強まってきていることに伴い、長期的には各国の資産価格の連動性が高くなっていることもまたよく知られた事実である (Christoffersen et al. (2012))。2000 年代初頭の水準への回帰が訪れるのか、それとも 2007 年以降の相関項の高水準化は長期的なトレンドや構造変化によるもので、2013 年初頭以降の値の下落は全体としては一時的なものなのかについては、今後のデータを用いた分析が待たれるところである。

4 まとめと拡張

本稿では、資産収益率間の相関が時間変動する、二変数の SV モデルについて解説し、二つの株価指数系列に応用した。両系列とも収益率のボラティリティ及び収益率間の相関項は高い自己相関を持ちつつ変動しており、ボラティリティ・クラスタリングや相関項の時間変動といった、金融資産特有の性質をよくとらえられていることを示せたといえる。

これまでは、二変数の系列についてのモデル及びその実証結果を扱ってきた。次に三変数以上の、一般の p-変数の系列を扱うにはどうすればよいだろうか。高い次元のデータを扱う際には、いずれも加速度的に推定するパラメータが増えるため、対象となる共分散構造の推定が非常に困難になるのはよく知られている。そこで、ある程度共分散構造を単純なものと仮定して推定を実行可能にすることがしばしば試られる。それは分散共分散構造が時間変動するこの SV モデルでも同様であり、ひとつの拡張が Kurose and Omori (2013) によって効率的な推定法と共に与えられている。紙面の都合上ここでは取り上げないが、他の拡張についても複数引用しているので参照されたい。

また、株式市場では、株価が下落した翌日のボラティリティが上昇する傾向にあることが知られている（レバレッジ効果）。これは、本稿のモデルで言えば $\epsilon_{i,t}$ と $\eta_{i,t+1}$ の相関を考え、それが負になることを確かめることで存在を示せる。更に、異なる株式収益率と翌日のボラティリティの間にも同様の関係が存在することが指摘されており、これは交差レバレッジ効果と呼ばれる。このような非対称性まで考慮すると、相関構造はより複雑になり、それにも工夫が必要になる。Kurose and Omori (2013) ではこの問題も取り上げられている。

参考文献

Bauwens, L., C. M. Hafner, and S. Laurent eds. (2012) *Handbook of Volatility Models and Their Applications*, Wiley.

Christoffersen, P., V. Errunza, K. Jacobs, and H. Langlois (2012) “Is the Potential for International Diversification Disappearing? A Dynamic Copula Approach,” *Journal of Financial Studies*, Vol.25, No.12, pp. 3711-3751.

Kurose, Y. and Y. Omori (2013) “Dynamic Equicorrelation Stochastic Volatility,” CIRJE Discussion Paper.

McNeil, A. J., R. Frey, and P. Embrechts (2005) *Quantitative Risk Management: Concepts,* *Techniques & Tools*, Princeton University Press (塚原英敦（訳者代表）(2008)『定量的リスク管理-基礎概念と数理技法-』共立出版).

里吉清隆・三井秀俊 (2011) 「日経平均株価のブル・ベア相場の分析—マルコフ・スイッチング EGARCH モデルの応用—」『大阪証券取引所先物・オプションレポート』 Vol.23, No.11.

三井秀俊 (2013) 「長期記憶モデルによる日経 225 先物のボラティリティに関する実証分析」『大阪証券取引所先物・オプションレポート』 Vol.25, No.6.

和合肇（編） (2005) 『ベイズ計量経済分析-マルコフ連鎖モンテカルロ法とその応用』東洋経済新報社.

渡部敏明 (2000) 『ボラティリティ変動モデル』朝倉書店.

渡部敏明 (2011) 「Realized GARCH モデル」『大阪証券取引所先物・オプションレポート』 Vol.23, No.8.