連続時間確率的分散変動オプション価格の閉じた解の考察

日本大学経済学部准教授　三井秀俊

1. はじめに

本稿は, 連続時間確率的分散変動 (Continuous time Stochastic Volatility) モデルによるオプション評価に関してサーベイを行なったものである. 連続時間確率的分散変動オプションに対して最初に閉じた解 (Closed-form Solution) を与えた Heston [1993] と, このモデルを発展させ確率金利とジャンプの変動を組み込んだ Bakshi *et al.* [1997] のモデルに関して概観する.

2. 連続時間確率的分散変動モデルによるオプション価格

ここでは, Heston [1993] を参考にして連続時間確率的分散変動モデルによるオプション価格について解説を行なう. 原資産価格 S は以下の確率微分方程式に従うとする[1).

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz_1. \tag{1}$$

ここで, μ はドリフト項, dt は時間の微小変化, σ はボラティリティ, dz_1 はウィナー過程を表す. また, ボラティリティ σ の確率過程が Ornstein-Uhlenbeck 過程である以下の確率微分方程式に従うとする.

$$d\sigma = -\beta\sigma dt + \delta dz_2. \tag{2}$$

ここで, β と δ は変動係数を表す. 伊藤のレンマ (Itô's Lemma) により, 分散 σ^2 は以下の確率微分方程式に従うとする.

$$d\sigma^2 = [\delta^2 - 2\beta\sigma^2]dt + 2\delta\sigma dz_2. \tag{3}$$

(3) 式は以下の平方根過程[2) (4) 式に近似することができる.

$$d\sigma^2 = \kappa[\theta - \sigma^2]dt + \delta\sigma dz_2. \tag{4}$$

ここで, θ は長期的な平均回帰, κ は長期的な平均回帰への調整速度を表す. ボラティリティは, 平均回帰の速度が κ によって決定される長期の平均 θ に向かって変動する. したがって, 平均ボラティリティ θ が上昇するとオプション価格も上昇する. また, dz_2 は dz_1 と相関 ρ を持つとする. 金利 r を一定と仮定するために, 時点 $t+\tau$ で満期になる一単位の割引債の時点 t における価格を

$$B(t, t+\tau) = e^{-r\tau} \tag{5}$$

とする. (1) 式 – (5) 式の仮定では, オプション価格付けを行なうのは十分ではなく, ボラティリティのリスクを考慮しなければならない. Cox *et al.* [1985] の資産均衡モデルより, オプション $U(S, \sigma^2, t)$ の価値は以下の確率微分方程式を満たさなければならない.

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \rho\delta\sigma^2 S\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial \sigma^2} + \frac{1}{2}\delta^2\sigma^2\frac{\partial^2 U}{\partial \sigma^4} + rS\frac{\partial U}{\partial S} + \{\kappa[\theta - \sigma^2] - \lambda(S, \sigma^2, t)\}\frac{\partial U}{\partial \sigma^2} - rS + \frac{\partial U}{\partial t} = 0. \tag{6}$$

ここで, $\lambda(S, \sigma^2, t)$ はボラティリティに関するリスク・プレミアムを表す. Breeden [1979] の consumption-based model より,

$$\lambda(S, \sigma^2, t)dt = \gamma Cov\left[d\sigma^2, \frac{dc}{c}\right] \tag{7}$$

1) 連続時間上で定義されている確率変数の動的な振る舞いをモデル化するためである.
2) 平方根過程は Ornstein-Uhlenbeck 過程と異なり負にならない. このため金利の変動をモデル化する際に非常に便利である.

とする．ここで, C は消費率, γ は投資家の相対的危険回避を表す．消費過程は以下の確率微分方程式に従うとする．

$$dC = \mu_c C dt + \delta_c \sigma C dz_3. \tag{8}$$

消費成長は現物資産の収益と一定の相関を持つ．リスク・プレミアムは σ^2 に比例することから, $\lambda(S, \sigma^2, t) = \lambda\sigma^2$ となる．

3. オプション価格の閉じた解の導出

Heston [1993] は, 原資産価格とボラティリティが (1), (4) 式に従うとき, 以下の適切な境界条件 (boundary condition) を与えて偏微分方程式 (6) 式を解き, コール・オプション価格 $C(S, \sigma^2, t)$ の閉じた解を与えた．

$$C(S, \sigma^2, T) = Max(0, S-K), \quad C(0, \sigma^2, t) = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial S}(\infty, \sigma^2, t) = 1,$$

$$rS\frac{\partial C}{\partial S}(S, 0, t) + \kappa\theta\frac{\partial C}{\partial \sigma^2}(S, 0, t) - r(S, 0, t) + \frac{\partial C}{\partial t}(S, 0, t) = 0, \quad C(S, \infty, t) = S.$$

Black-Scholes [1973] の公式を類推することにより, 次のように閉じた解を推測することができる．

$$C^{SV}(S, \sigma^2, t) = SP_1 - KP(t, T)P_2. \tag{9}$$

ここで, SP_1 は最適な権利行使による原資産の現在価値, $KP(t,T)P_2$ は権利行使価格の現在価値を表す．現在価格に対数をとると, $x = \ln[S]$ となり, P_1 と P_2 は以下の偏微分方程式を満たす．

$$\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2} + \rho\delta\sigma^2\frac{\partial^2 P_j}{\partial x \partial \sigma^2} + \frac{1}{2}\delta^2\sigma^2\frac{\partial^2 P_j}{\partial \sigma^4} + (r + u_j\sigma^2)\frac{\partial P_j}{\partial x} + (a_j - b_j\sigma^2)\frac{\partial P_j}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial P_j}{\partial t} = 0, \quad j = 1, 2. \tag{10}$$

ここで,

$$u_1 = \frac{1}{2}, \quad u_2 = -\frac{1}{2}, \quad a = \kappa\theta, \quad b_1 = \kappa + \lambda - \rho\delta, \quad b_2 = \kappa + \lambda$$

である．初期条件は, $P_j(x, \sigma^2, T; \ln K) = 1_{\{x \geq \ln K\}}$ であり x は以下の過程に従う．

$$dx_t = [r + u_j\sigma^2]dt + \sigma dz_1, \tag{11}$$

$$d\sigma^2 = (a_j - b_j\sigma^2)dt + \delta\sigma dz_2. \tag{12}$$

P_j をオプションが in-the-money で行使される条件付確率とすると

$$P_j(x, \sigma^2, T; \ln[K]) = Pr[x(T) \geq \ln[K] | x(t) = x, \sigma^2(t) = \sigma^2] \tag{13}$$

となるが closed-form においては有用ではない．しかし, 特性関数 $f_1(x, \sigma^2, T; \phi)$ と $f_2(x, \sigma^2, T; \phi)$ を用いることにより以下の terminal condition の制約の下で偏微分方程式 (10) 式を満たす．

$$f_j(x, \sigma^2, T; \phi) = e^{i\phi x}. \tag{14}$$

このとき, 特性関数の解は,

$$f_j(x, \sigma^2, T; \phi) = e^{C(T-t;\phi) + D(T-t;\phi)\sigma^2 + i\phi x} \tag{15}$$

のように与えられる．ここで,

$$C(\tau; \phi) = r\phi i\tau + \frac{a}{\delta^2}\left\{(b_j - \rho\delta\phi i + d)\tau - 2\ln\left[\frac{1 - ge^{d\tau}}{1 - g}\right]\right\}, \quad D(\tau; \phi) = \frac{b_j - \rho\delta\phi i + d}{\delta^2}\left[\frac{1 - e^{d\tau}}{1 - ge^{d\tau}}\right],$$

$$g = \frac{b_j - \rho\delta\phi i + d}{b_j - \rho\delta\phi i - d}, \quad d = \sqrt{(\rho\delta\phi i - b_j)^2 - \delta^2(2\mu_j\phi i - \phi^2)}$$

である．したがって, 以下のように特性関数を反転させることにより, もともとの確率を得ることができる (フーリエの逆変換; fourier inversion).

$$P_j(x,\sigma^2,T;\ln[K]) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty Re\left[\frac{e^{-i\phi\ln[K]}f_j(x,\sigma^2,T;\phi)}{i\phi}\right]d\phi. \tag{16}$$

ここで, $Re[\cdot]$ は複素数の整数部分 (real part) を表す．(9), (15), (16) 式の 3 つの方程式よりヨーロピアン・コール・オプションの解が得られる．Heston [1993] は, 所与のパラメータの下で以下のようなシミュレーション結果を得ている．(i) 相関係数 ρ は, 原資産収益率の歪度に影響を与える．$\rho > 0$ のとき, σ の値が高いと原資産収益率の確率密度の右裾を広げるが, σ の値が低いと原資産収益率の確率密度の左裾を広げることはない．$\rho < 0$ のときには $\rho > 0$ の場合と逆の結果になる．(ii) $\rho > 0$ ($\rho < 0$) のとき Black-Scohles モデルと比較して, out-of-the-money のコール・オプション価格を上昇（低下）させ, in-the-money のコール・オプション価格を低下（上昇）させる．(iii) δ は, ボラティリティのボラティリティをコントロールする．(iv) $\delta = 0$ のとき, ボラティリティは一定となる．σ の変動は原資産収益率の尖度を上昇させる．(v) σ の変動は, far-in-the-money のオプション価格を上昇させ near-the-money のオプション価格を低下させる．out-of-the-money に比べて in-the-money のオプション価格に影響をより与える．

以上の結果より原資産収益率とボラティリティ σ との相関係数と, ボラティリティ σ の変動がオプション価格の評価を行なう際に重要な要因であることがわかる．しかし, Heston [1993] のモデルは連続型のためパラメータの推定を行なうことはできず, 実証研究に直接利用することはできない.

4. 確率的金利変動とジャンプの導入

Bakshi *et al.* [1997] は, Heston [1993] のモデルに対して原資産価格の確率的金利とジャンプの変動を同時に組み入れた SVSI-J (Stochastic Volatility and Stochastic Interest-rate random Jump) モデルを用いて, 閉じた解の導出と実証研究を行なっている．原資産価格 S とボラティリティ σ は以下のような連続時間過程に従うとする.

$$dS = [r - \varphi\mu]Sdt + \sigma Sdz_1 + JSdq, \tag{17}$$

$$d\sigma^2 = [\theta - \kappa\sigma^2]dt + \delta\sigma dz_2, \tag{18}$$

$$\ln[1+J] \sim N\left(\ln[1+\mu_J] - \frac{1}{2}\sigma_J^2, \sigma_J^2\right). \tag{19}$$

ここで, r は時点 t の瞬間的な spot interest rate, dz_1, dz_2 は $Cov(dz_1, dz_2) = \rho dt$ とし, J は無条件平均 μ である *i.i.d.* の対数正規分布に従い, ジャンプの大きさ (%) を表す．また, κ は調整速度, δ はボラティリティ σ の変動係数を表す．ここで, q, J はそれぞれ dz_1, dz_2 と無相関とする．Λ は, 強度 (intensity) φ と逆のポアソン・ジャンプを表す．すなわち,

$$Pr\{d\Lambda = 1\} = \varphi dt, \quad Pr\{d\Lambda = 0\} = 1 - \varphi dt$$

となる．ここで, 収益率の分散は $\frac{1}{dt}Var\left(\frac{dS}{S}\right) = \sigma^2 + \sigma_J^2$ のように 2 つの成分に分解される．ここで, $\sigma_J^2 = \frac{1}{dt}$ である．また, 瞬間的なジャンプ成分の分散は,

$$Var[Jdq] = \lambda\left[\mu_J^2 + (e^{\delta_J^2 - 1})\right]$$

となる．これは, 歪度は相関 ρ, あるいは平均ジャンプ μ_J によってコントロールされることを意味する.

また, 金利変動は以下のような Cox *et al.* [1985b] の期間構造 (term structure) モデルを用いる.

$$dr = [\theta_r - \kappa_r r]dt + \delta_r r dz_3. \tag{20}$$

ここで, dz_3 は dz_1, dz_2 と無相関であると仮定する．$\tau = T - t$ として, ゼロ・クーポン債の t 時点での価格を $B(t, \tau)$ とすると,

$$B(t,\tau) = E\left\{\exp\left(-\int_t^{t+\tau} r(s)ds\right)\right\} \tag{21}$$

と表すことができる．Heston [1993] と同様に以下のような偏微分方程式が得られる．

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r - \varphi\mu)S\frac{\partial C}{\partial S} + \rho\delta\sigma^2 S\frac{\partial^2 C}{\partial S\partial\sigma^2} + \frac{1}{2}\delta^2\sigma^2\frac{\partial^2 C}{\partial\sigma^4} + \frac{1}{2}\delta_r^2\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + [\theta_r - \kappa_r r]\frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\partial C}{\partial\tau} - rC\\ &+\varphi E\{C(t,\tau;S_{1+J},r,\sigma^2) - C(t,\tau;S,r,\sigma^2)\} = 0.\end{aligned} \tag{22}$$

ここで, Heston [1993] と同様にフーリエの逆変換を用いるとコール・オプション価格 C_t^{SVSI-J} は,

$$C_t^{SVSI-J} = SP_3 - KB(t,\tau)P_4, \tag{23}$$

$$P_j(t,\tau;S,\sigma^2,r) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty Re\left[\frac{e^{-i\phi\ln[K]}f_j(t,\tau;S,\sigma^2,r;\phi)}{i\phi}\right]d\phi,\ j = 3,4$$

として評価することができる．(23) 式のオプション評価式は, (i) Black-Scohles; $\varphi = \theta = \kappa = \delta = \theta_r = \kappa_r = \delta_r = 0$, (ii) SV (Stochastic Volatility); $\varphi = \theta_r = \kappa_r = \delta_r = 0$, (iii) SI (Stochastic Interest-rate); $\varphi = \theta = \kappa = \delta = 0$, (iv) SVJ (Stochastic Volatility random Jump); $\theta_r = \kappa_r = \delta_r = 0$, (v) SVSI (Stochastic Volatility and Stochastic Interest-rate); $\varphi = 0$, のようなオプション評価モデルを包含している．

パラメータの推定には, 以下のような非線形最小 2 乗法 (NLS: Nonlinear Least Squares) を利用している．

* Step1: 同時点で観測される N 個のオプションを標本とする．N はパラメータの数に等しいか, パラメータの数＋ 1 よりも大きいとする．$n = 1\cdots N$ に対して 行使日までの期間と行使価格を τ_n と K_n とする．$C_n^{\text{市場価格}}$ と $C_n^{\text{理論価格}}$ との間の差は Y と $\Theta \equiv \{\kappa,\theta,\sigma,\kappa_r,\theta_r,\sigma_r,\rho,\varphi,\mu_J,\sigma_J\}$ の価値関数であり，各々の n に対して,

$$\varepsilon_n[Y_t,\theta] \equiv C_n^{\text{市場価格}}(t,\tau_n,K_n) - C_n^{\text{理論価格}}(t,\tau_n,K_n) \tag{24}$$

  と定義する．

* Step2: Y とパラメータ Θ は以下の式を解くことによって得られる．

$$SSE_t \equiv \min_{Y_t,\theta}\sum_{n=1}^{N}|\varepsilon_n[Y_t,\Theta]|^2. \tag{25}$$

Step1, Step2 が標本内で各日付に対して行なわれるまで繰り返す.

また, (25) 式の目的関数はオプション価格の誤差の 2 乗和 (SSE: Sum of Squared pricing Error) として定義されているため，in-the-money オプションと長期のオプションを重要視し，短期と out-of-the-money オプションを軽視することになってしまう．そのため, % での価格誤差の 2 乗和を最小化する．オプション・データは S&P 500 オプションを用い, 金利データは財務省証券 (Treasury-bill; TB) を用いている．ヨーロッパ型オプションに対して原資産の株価は，離散的な配当を調整しなければならない．時点 t から行使日までの τ 期間の各々のオプション契約に対して以下の式を計算することによって日々の配当 $D(t)$ の現在価値を得る．

$$\bar{D} \equiv \sum_{s=1}^{\tau-t} e^{r(t,s)s}D(t+s). \tag{26}$$

$r(t,s)$ は満期までの s 期利回りである配当を落とした S&P 500 株価指数を得るために時点 t の指数から将来の配当の現在価値を引かなければならない．Bakshi *et al.* [1997] の実証結果を纏めると以下のようになる．(i) SI モデルと SVSI-J モデルは各々 Black-Scohles モデルと SVJ モデルのパフォーマンスを改善することはない. (ii) 定式化の誤り (misspecification) は, BS, SV, SVSI, SVJ モデルの中では SVJ が最も小さく Black-Scohles モデルが最も大きい. (iii) プライシング・エラー (pricing error) は, Black-Scohles モデルが最も大きく, 次に SV モデルが大きい. 最も小さいのは SVJ モデルである. (iv) ボラティリティ σ の変動だけでも Black-Scohles モデルのプライシング・エラーを 25 % から 60 % 改善することができる. (v) ジャンプ過程は短期のオプションのパフォーマンスを改善し, 金利 r の変動は長期のオプションのパフォーマンスを改善する.

5．まとめ

本稿は, 連続時間確率的分散変動モデルによるオプション価格付けに関してサーベイを行なったものである．確率的分散変動モデルでは, ボラティリティと原資産価格収益との相関が重要となることがわかる．また, ボラティリティが原資産価格収益率と無相関ならばボラティリティのボラティリティ上昇は原資産価格収益率の歪度ではなく尖度を上昇させる．この場合 near-the-money オプションに比べて far-from-the-money オプションの価格を上昇させることになる．また, ボラティリティの確率的変動は, オプション価格に非常に強く影響し, Black-Scohles モデルよりもパフォーマンスが良くなることがわかる．また, 確率金利やジャンプを取り入れた場合には, 前者は長期のオプションに対してして有効であり, 後者の場合には短期のオプションに対して有効となる．

連続時間確率的分散変動モデルは, オプション価格付けに有効な方法である．しかし, 確率的分散変動はボラティリティを観測されない変数として扱っているため, 尤度を求めることが難しいなどの難点がある．したがって, 確率的分散変動モデルによるオプション評価に関する実証研究は非常に少なく, 今後多くの実証研究が行なわれることが期待される．また, 株式市場のボラティリティ変動の性質を捉える他のモデルとして, マルコフ・スイッチング・モデル (Markov Switching Model; MS モデル) がある．So *et al.* [1998] は, マルコフ・スイッチングを導入したマルコフ・スイッチング確率的分散変動モデル (MS-SV Model) を提案しているため, オプション評価への応用が望まれる．

参考文献

[1] Bakshi, G., C. Cao and Z. Chen [1997], “Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models,” *Journal of Finance*, 52, pp.2003–2049.

[2] Breeden, D. T. [1979], “An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities,” *Journal of Financial Economics*, 7, pp.265-296.

[3] Black, F. and M. Scholes [1973], “The Pricing of Options and Corporate Liabilities,” *Journal of Political Economy*, 81, pp.637–654.

[4] Cox, J. C., J. E. Ingersoll and S. A. Ross [1985a], “An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices,” *Econometrica*, 53, pp.363–384.

[5] Cox, J. C., J. E. Ingersoll and S. A. Ross [1985b], “A Theory of the Term Structure of Interest Rates,” *Econometrica*, 53, pp.385–408.

[6] Heston, S. L. [1993], “A Closed Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options,” *Review of Financial Studies*, 6, pp.327–343.

[7] So, M. K. P., K. Lam and W. K. Li [1998], “A Stochastic Volatility Model with Markov Switching,” *Journal of Business & Economic Statistics*, 16, pp.244–253.