

Realized GARCH モデル

一橋大学経済研究所教授 渡部敏明

1 はじめに

資産価格の高頻度データが利用可能になったことにより、日中の高頻度リターンの 2 乗を足し合わせた Realized Volatility (RV) と呼ばれるボラティリティの推定量に注目が集まっている¹。RV はリスク管理にも応用されており、例えば、Ubukata and Watanabe (2011) は日経 225 オプション価格の評価において RV が有用であることを示している。また、Koopman et al. (2005)、渡部 (2007)、渡部・佐々木 (2006) はボラティリティの予測において RV が有用であることを示している。

資産価格にノイズがなければ、RV の計算に用いる日中の高頻度リターンの時間間隔を 0 に近づけると、RV は真のボラティリティに確率収束するが、高頻度の資産価格は非同期取引 (non-synchronous trading) や bid-ask spread など市場のマイクロ構造によるノイズ (マイクロストラクチャーノイズ) を含む²。そこで、RV にはマイクロストラクチャーノイズによるバイアスがあるので、それを調整するためのさまざまな方法が提案されている。また、夜間や昼休みなど市場が閉まっている時間がある場合には、その時間は高頻度リターンが得られない。そこで、その時間を無視して、取引が行われている時間だけの高頻度リターンを使って RV を計算すると、一日のボラティリティを過小評価してしまうので、それを調整する方法も提案されている³。

近年、RV と日次リターンとを同時にモデル化しようとする新たな動きが見られる。具体的には、Takahashi et al. (2009) が確率的ボラティリティ変動 (stochastic volatility; SV) モデルを拡張した Realized SV モデル、Hansen et. al. (2011) が GARCH モデルを拡張した Realized GARCH モデルを提案している⁴。これらのモデルでは、マイクロストラクチャーノイズや市場が閉まっている時間を無視することによる RV のバイアスを明示的にモデル化している⁵。

本稿では、これらのモデルの内、Realized GARCH モデルについて簡単に解説する。また、こ

*本研究は、一橋大学グローバル COE プログラム「社会科学の高度統計・実証分析拠点構築」、平成 23 年度一橋大学共同利用・共同研究プロジェクト研究「高度データを用いたボラティリティの推定とリスク管理への応用」、文部科学省科学研究費補助金 (課題番号: 18203901, 21243018, 22243021) から助成を受けている。

¹RV について詳しくは、渡部 (2007) を参照されたい。

²マイクロストラクチャーノイズについて詳しくは、Campbell et al. (1997) を参照されたい。

³マイクロストラクチャーノイズによるバイアスや市場が閉まっている間のボラティリティの調整について詳しくは、生方・渡部 (2011) や Ubukata and Watanabe (2011) を参照されたい。

⁴SV モデルや GARCH モデルについては、渡部 (2000) を参照されたい。

⁵これらのモデルには、日次リターンの変動を表すパラメータとボラティリティの変動を表すパラメータを同時推定できるというメリットもある。例えば、日次リターンの分布に学生分布を仮定した場合、その自由度とボラティリティの式のパラメータを同時に推定できる。この点については、Watanabe (2011) を参照されたい。

のモデルは (擬似) 最尤法によって簡単に推定できるので⁶、日経 225 株価指数に応用し、推定結果を説明する。

2 Realized GARCH モデル

日次リターン R_t を、以下のように、 $t-1$ 期に予測可能な変動 $E(y_t | I_{t-1})$ と予測不可能な変動 ϵ_t に分割する。

$$R_t = E(R_t | I_{t-1}) + \epsilon_t. \quad (1)$$

ここで、 I_{t-1} は $t-1$ 期に利用可能な情報集合を表す。

さらに、この予測不可能な変動 ϵ_t を、正の値をとる σ_t と平均 0、分散 1 で過去と独立かつ同一な分布に従う (independently and identically distributed; i.i.d.) 確率変数 z_t との積として表す。

$$\epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad z_t \sim \text{i.i.d.}, \quad E(z_t) = 0, \quad \text{Var}(z_t) = 1. \quad (2)$$

この σ_t もしくは σ_t^2 をボラティリティと呼ぶ。

Hansen et al. (2011) の Realized GARCH モデルでは、真のボラティリティの対数値 $\ln \sigma_t^2$ と RV の対数値 $\ln RV_t$ の変動を以下のように定式化する。

$$\ln \sigma_t^2 = \omega + \beta \ln \sigma_{t-1}^2 + \gamma \ln RV_{t-1}, \quad (3)$$

$$\ln RV_t = \mu + \varphi \ln \sigma_t^2 + \tau_1 z_t + \tau_2 (z_t^2 - 1) + \xi_t, \quad \xi_t \sim \text{i.i.d.}, \quad E(\xi_t) = 0, \quad \text{Var}(\xi_t) = \sigma_\xi^2. \quad (4)$$

ただし、これは Hansen et al. (2011) が提案しているモデルの一つであり、彼らは真のボラティリティや RV の対数を取らないモデルや (3) 式の次数を増やしたモデルについても分析している。

(3) 式は真のボラティリティ σ_t^2 の変動を表す式である。GARCH モデルでは、

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + \gamma \epsilon_{t-1}^2 \quad (5)$$

と定式化するが、(3) 式では ϵ_{t-1}^2 ではなく、 $\ln RV_{t-1}$ を用いている。

(4) 式は真のボラティリティと RV の関係を表す式である。既に述べたように、RV にはマイクロストラクチャーノイズによるバイアスがある。また、夜間や昼休みなど市場が閉まっている時間を無視して RV を計算すると、真の日次ボラティリティ σ_t^2 を過小評価してしまう。(4) 式の μ, φ はそうした RV のバイアスを調整するパラメータである。もし RV にバイアスがなく、真

⁶SV モデルや Realized SV モデルは (擬似) 最尤法による推定が難しいため、Takahashi et al. (2009) はマルコフ連鎖モンテカルロ法 (Markov chain Monte Carlo; MCMC) を用いてベイズ推定している。

のボラティリティの不偏推定量であれば、 $\mu = 0$ 、 $\varphi = 1$ となる。(4)式では、 $\ln RV_t$ が(2)式の基準化された誤差項 z_t にも依存すると仮定している。株式市場では、株価が上がった日の翌日より下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇する傾向があることが知られている。 τ_1 の値が負であれば、 z_{t-1} が正の時よりも負の時の方が $\ln RV_{t-1}$ がより上昇するので、さらに(3)式の γ が正であれば、 $\ln \sigma_t^2$ も z_{t-1} が正の時よりも負の時の方がより上昇することになる。

3 日経225株価指数への応用

本節では日経225株価指数の日次リターンとRVを用いてRealized GARCHモデルを推定し、結果を説明する。日次リターンは日経平均の終値の対数階差を100倍して計算した。また、RVは昼休みと夜間を除く前場と後場の日経225の1分ごとのリターン(%)の2乗を単純に足し合わせて計算した。サンプル期間は1990年5月30日から2009年9月30日で、サンプル数は3281である。このサンプル期間の日経225の日次リターンには有意な自己相関はなく、平均も0から有意に乖離しないので、(1)式の $E(R_t|I_{t-1})$ は0とした。パラメータの推定は擬似最尤法によって行った。(2)式の z_t と(4)式の ξ_t が正規分布に従わない場合に、それらの分布を正規分布であると仮定して求めた尤度(擬似尤度)を最大化するパラメータの値を推定値とするのが擬似最尤法である。GARCHモデルやRealized GARCHモデルの(擬似)最尤推定について詳しくは、それぞれ渡部(2000)、Watanabe(2011)を参照されたい。

表1: Realized GARCHモデルのパラメータの推定結果

	ω	β	γ	μ	φ	τ_1	τ_2	σ_ξ
推定値	0.3840	0.6105	0.3707	-0.9844	0.9667	-0.0529	0.1144	0.3941
標準誤差	0.0271	0.0252	0.0252	0.0357	0.0342	0.0072	0.0056	0.0054

表1はRealized GARCHモデル(3)-(4)式の各パラメータの推定結果をまとめたものである。標準誤差は、擬似最尤法の標準誤差を計算している⁷。資産価格のボラティリティのショックには高い持続性があることが知られており、この現象はボラティリティ・クラスタリングと呼ばれる。(4)式を(3)式に代入すると、

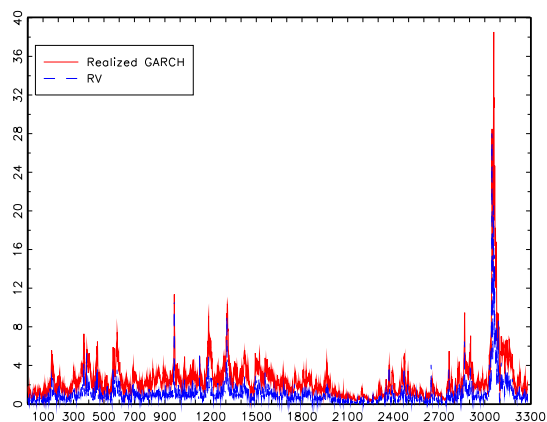
$$\ln \sigma_t^2 = \omega + \gamma\mu + (\beta + \gamma\varphi) \ln \sigma_{t-1}^2 + \gamma[\tau_1 z_{t-1} + \tau_2(z_{t-1}^2 - 1)] + \gamma\xi_{t-1} \quad (6)$$

となる。そこで、Realized GARCHモデルでは、ボラティリティのショックの持続性は $\beta + \gamma\varphi$ で表されるので、それに表1の β 、 γ 、 φ の推定値を代入すると、0.9689と1に近い値になり、ボ

⁷擬似最尤推定量の標準誤差について詳しくは、渡部(2000)を参照されたい。

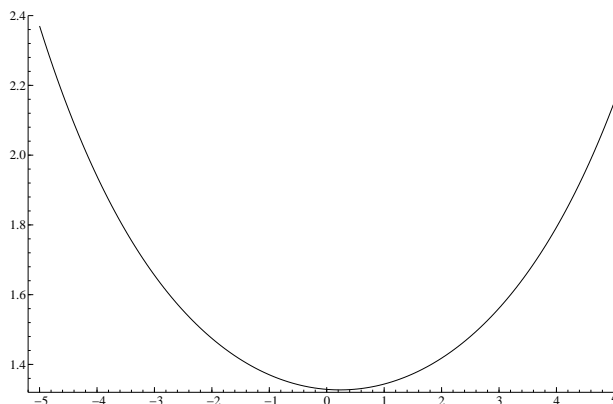
ラティリティのショックの持続性が高いことがわかる。

図 1: Realized GARCH モデルによるボラティリティ σ_t^2 の推定値と RV



また、日次リターンは終値の階差なので、 σ_t^2 は $t-1$ 日に市場が閉まってから t 日に市場が閉まるまでのボラティリティであるのに対し、 RV_t は $t-1$ 日に市場が閉まって t 日に市場が開くまで (夜間) と t 日の昼休みを無視しているので、 RV_t は σ_t^2 を過小評価している。そのため、 μ の推定値は -0.9844 と負の値を示している。図 1 は Realized GARCH モデルのパラメータの値を表 1 の推定値として計算した各営業日の σ_t^2 の推定値を RV と共にグラフ化したものである。この図からも RV は真のボラティリティ σ_t^2 を過小評価していることがわかる。

図 2: ニュースインパクト曲線



さらに、 τ_1 の推定値が有意な負の値を示していることから、価格が上がった日の翌日よりも価格が下がった日の翌の方がボラティリティがより上昇する傾向があることがわかる。図 2 は

$\ln(\sigma_{t-1}^2)$ を定常値 $(\omega + \gamma\mu)/(1 - \beta - \gamma\varphi)$ とし⁸、パラメータの値を表 1 の推定値として、(3)–(4) 式から z_{t-1} と σ_t^2 の関係を描いたものである。図 2 では、横軸が z_{t-1} 、縦軸が σ_t^2 を表している。

4 まとめと今後の研究課題

本稿では、Realized GARCH モデルについて解説し、日経 225 株価指数に応用した。本稿では、Realized GARCH モデルのパラメータの推定を行っただけであるが、Realized GARCH モデルや Realized SV モデルはまだリスク管理にそれほど応用されていないので、現在、これらのモデルがボラティリティの予測、オプション価格の評価、Value-at-Risk などのリスク管理において有用であるかどうか分析を行っている。Realized Volatility の Value-at-Risk や Expected Shortfall への応用については、Watanabe (2011) を参照されたい。

参考文献

- Campbell, J. Y., Lo A. W. and MacKinlay, A. C. (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton: Princeton University Press. (祝迫得夫・大橋和彦・中村信弘・本田俊毅・和田賢治訳 (2003) 『ファイナンスのための計量分析』共立出版.)
- Hansen, P. R., Huang, Z. and Shek, H. (2011), “Realized GARCH: A Joint Model of Returns and Realized Measures of Volatility,” *Journal of Applied Econometrics*, forthcoming.
- Koopman, S. J., Jungbacker, B. and Hol, E. (2005), “Forecasting Daily Variability of the S&P 100 Stock Index Using Historical, Realized and Implied Volatility Measurements,” *Journal of Empirical Finance*, Vol.12, No.3, pp.445–475.
- Takahashi, M., Omori, Y. and Watanabe, T. (2009), “Estimating Stochastic Volatility Models Using Daily Returns and Realized Volatility Simultaneously”, *Computational Statistics & Data Analysis*, Vol.53, No.6, pp.2404–2426.
- Ubukata, M. and Watanabe, T. (2011), “Pricing Nikkei 225 Options Using Realized Volatility,” IMES Discussion Paper Series, No.2011-E-18, Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan.
- Watanabe, T. (2011), “Quantile Forecasts of Financial Returns Using Realized GARCH Models,” Global COE Hi-Stat Discussion Paper Series 195, Hitotsubashi University.

⁸ $\ln(\sigma_{t-1}^2)$ の定常値は、(6) 式において、 $\ln(\sigma_t^2) = \ln(\sigma_{t-1}^2)$ とし、 $\gamma[\tau_1 z_{t-1} + \tau_2 (z_{t-1}^2 - 1)] + \gamma\xi_{t-1}$ をその期待値 0 とすると求まる。

生方雅人・渡部敏明 (2011) 「実現ボラティリティ-ボラティリティの計測方法とリスクマネジメントへの応用可能性-」『証券アナリストジャーナル』 Vol.49, No.8, pp.16-25.

渡部敏明 (2000) 『ボラティリティ変動モデル』朝倉書店.

渡部敏明 (2007) 「Realized Volatility-サーベイと日本の株式市場への応用」『経済研究』第 58 巻第 4 号, pp.352-373.

渡部敏明・佐々木浩二 (2006) 「ARCH 型モデルと “Realized Volatility” によるボラティリティの予測とバリュー・アット・リスク」『金融研究』第 25 巻別冊第 2 号, pp.39-74.